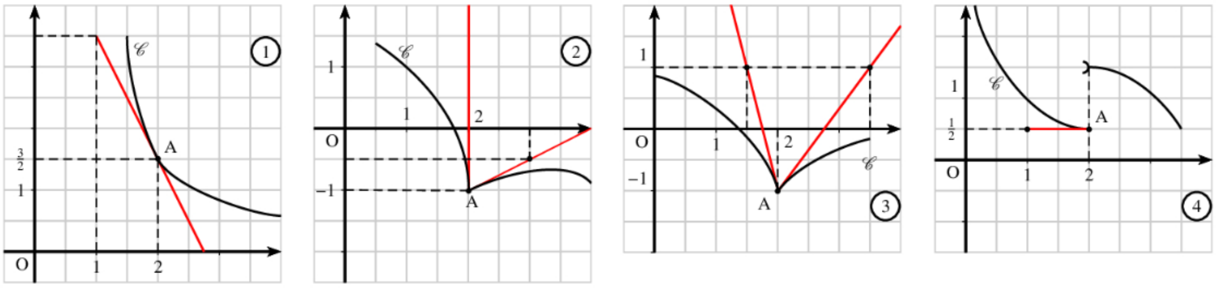
↫ Éléments de correction de l'interrogation n°8 ↬

Exercice 1

1. **a.** Parmi les 4 courbes ci-dessous, quelles sont celles représentant des fonctions continues en 2 ?



Solution : Les courbes 1, 2 et 3 représentent des fonctions continues en 2.

b. Parmi les 4 courbes ci-dessus, quelles sont celles représentant des fonctions dérivables en 2 ?

Solution : Seule la courbe n°1 est dérivable en 1 car la pente de la tangente semble continue en 2. Pour les courbes 2 et 3, la limite à gauche et la limite à droite de la dérivée ne sont pas les mêmes, la fonction ne sera donc pas dérivable en 2.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}} + 5 & \text{pour } x < 2 \\ 5 & \text{pour } x \geqslant 2 \end{cases}$

a. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution :

- Sur $I =]-\infty\,;\,2[$, la fonction est continue comme composée et produit des fonctions $x \to 2x$, $x \to e^x$ et $x \to \dfrac{1}{x-2}$ continues sur I.
- Sur $J = [2\,;\,+\infty[$, la fonction est continue car c'est une fonction constante.
- Étudions la fonction en 2 : $f(2) = 5$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 5$.

  Et : par quotient, $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{x \to 2^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}} = \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$,
  puis par produit, $\lim\limits_{x \to 2^-} 2x\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}} = 4 \times 0$, et enfin par somme : $\lim\limits_{x \to 2^-} 2x\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}} + 5 = 0 + 5 = 5$.
  On a donc : $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$: f est continue en 2.
  Finalement, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?

Solution : Calculons les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement en 2 :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{5-5}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}} + 5 - 5}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}}}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} 2x \times \frac{1}{x-2} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}} = \lim\limits_{X \to -\infty} X \times \mathrm{e}^X = 0$, par croissance comparée.

Puis par produit : $\lim\limits_{x \to 2^-} 2x \times \dfrac{1}{x-2} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}} = 4 \times 0 = 0$

Finalement : $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$, donc la fonction est dérivable en 2.

OU

Solution : Calculons les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement en 2 :

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{5-5}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} 0 = 0$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{2(2+h)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}+5-5}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{2(2+h)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} 2(2+h)\times\dfrac{1}{h}\times\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}$.

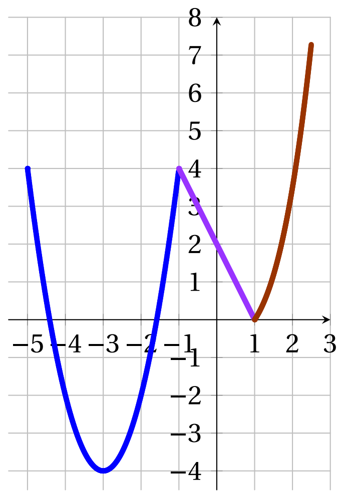
Or, $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1}{h} = -\infty$, donc : $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1}{h}\times\mathrm{e}^{\frac{1}{h}} = \lim\limits_{X\to -\infty} X\times\mathrm{e}^{X} = 0$, par croissance comparée.

Puis par produit : $\lim\limits_{h\to 0^-} 2(2+h)\times\dfrac{1}{h}\times\mathrm{e}^{\frac{1}{h}} = 4\times 0 = 0$

Finalement : $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$, donc la fonction est dérivable en 2.

3. On donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur I=$[-5;2,5]$.

a. Justifier par des arguments graphiques la continuité de f sur I.



Solution : Sur I, on peut tracer la courbe sans « lever le stylo », ce qui signifie que la fonction est continue sur I.

b. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ selon les valeurs du réel k.

Solution :

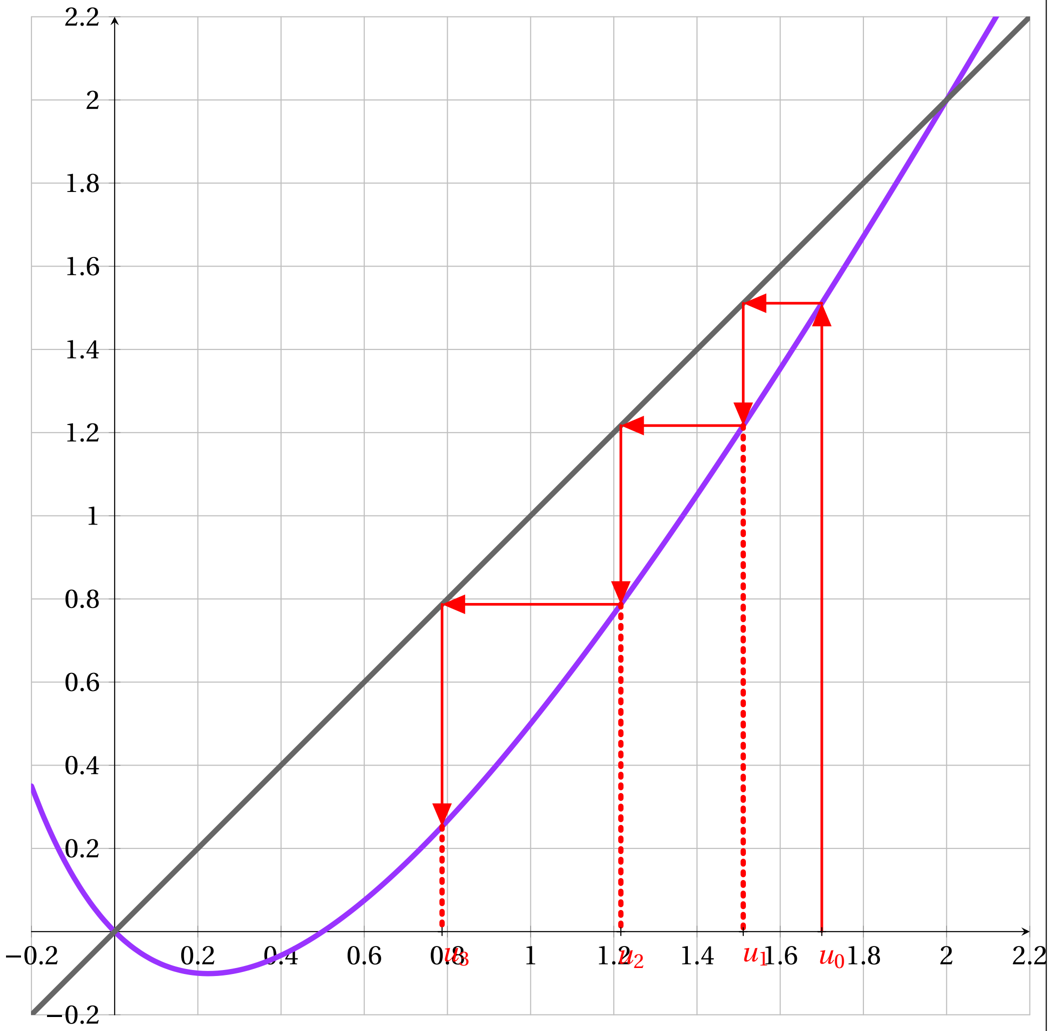
- si $k < -4$ ou $k > 7,2$, $f(x) = k$ n'a pas de solution.
- si $4 < k \leqslant 7,2$ ou $k = -4$, $f(x) = k$ a une solution.
- si $-4 < k < 0$, $f(x) = k$ a deux solutions.
- si $k = 0$ ou $k = 4$, $f(x) = k$ a trois solutions.
- si $0 < k < 4$, $f(x) = k$ a quatre solutions.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1,7$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2+1}{u_n+1} - 1$.
On admet que cette suite est convergente, majorée par u_0 et minorée par $-0,2$.

1. Ci-dessous, on a tracé la représentation graphique de la fonction $f : x \to \dfrac{2x^2+1}{x+1} - 1$.
Construire graphiquement les 4 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses du graphique.
On laissera les traits de construction.

Solution :



2. Déterminer par le calcul la limite de la suite (u_n).

Solution : On sait que :

- (u_n) est une suite convergente vers un réel $\ell < 1,7$
- $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$
- la fonction f est une fonction continue sur $]-1\,;\,+\infty[$, car somme d'un quotient de deux fonctions polynomiales ne s'annulant pas sur $]-1\,;\,+\infty[$ et d'une fonction constante.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est alors solution de l'équation $f(x) = x$:

$f(x) = x \Longleftrightarrow \dfrac{2x^2+1}{x+1} - 1 = x \Longleftrightarrow 2x^2 + 1 - (x+1) = x(x+1)$, car $x \neq -1$

$f(x) = x \Longleftrightarrow 2x^2 - x = x^2 + x \Longleftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Or, $\ell < 1,7$, donc $\ell = 0$: la suite (u_n) converge vers 0.

.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de trouver la ou les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 + 3x - 5 = 0$.
Soit $g : x \to x^3 + 3x - 5$.

1. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

> **Solution :** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$, donc par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
> De même : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x = -\infty$, donc par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

2. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

> **Solution :** On calcule la dérivée de g :
> $\forall x \in \mathbb{R} : g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0$, car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 0$, donc $x^2 + 1 > 1$.
> On peut donc dresser le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	
variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

> **Solution :**
> La fonction g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynomiale), et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente.
> De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) < 0 < \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
> D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

4. Donner une valeur approchée au centième de α.

> **Solution :** D'après la tableur de la calculatrice, $g(1,154) < 0$ et $g(1,155) > 0$. On eut donc dire que $\alpha \approx 1,15$.