Nom : Prénom : Classe : $Term$.....	**INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES N°3** **Modèle _ corrigé**	
Thème : limites de fonctions		***calculatrice autorisée*** _

EXERCICE 1 :

1. Si une fonction a une valeur interdite en a, alors sa courbe représentative admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

a. VRAI ☐ **b.** FAUX ☒

Exemple : $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ est une fonction qui a une valeur interdite en 1 et pourtant sa courbe représentative n'a pas d'asymptote verticale d'équation $x = 1$.

En effet, $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} x + 1 = 2$

2. On a $f(x) \leq -\sqrt{x}$, déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

a. 0 ☐ **b.** $+\infty$ ☐ **c.** $-\infty$ ☒ **d.** on ne peut pas savoir ☐

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$ et $f(x) \leq -\sqrt{x}$, donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

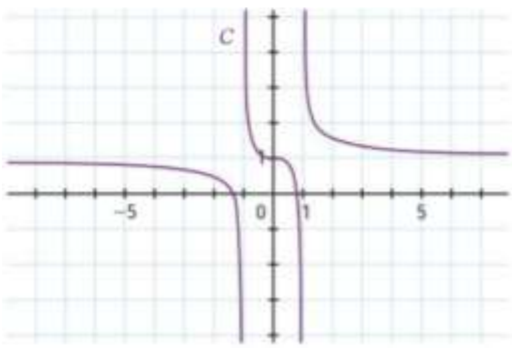
3. On a $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq e^{-x}$, déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

a. 0 ☒ **b.** 1 ☐ **c.** $-\infty$ ☐ **d.** on ne peut pas savoir ☐

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. Retrouver les formes indéterminées parmi les propositions suivantes, vous préciserez celles qui sont directement liées à une croissance comparée (entouré en rouge)

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x}$ ☐ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x$ ☒ **c.** $\lim\limits_{x\to2} \frac{2-x}{x^2-4}$ ☒ **d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - x^3$ ☒



EXERCICE 2 :

Ci-contre la courbe représentative d'une fonction *f*.

1. Compléter par lecture graphique : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

2. Conjecturer graphiquement les limites à gauche et à droite de la fonction *f* en 1.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to1}} f(x) = -\infty$

3. Combien la courbe représentative de *f* a-t-elle d'asymptote(s) horizontale(s) ? Expliciter la (ou les) équation(s).

La courbe représentative de f a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ $et\ en -\infty$.

4. Combien la courbe représentative de *f* a-t-elle d'asymptote(s) verticale(s)? Expliciter la (ou les) équation(s).

La courbe représentative de f admet deux asymptotes verticales d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

5. Voici le tableau de variations d'une fonction *f*.
En déduire la (ou les) asymptote(s) dont on donnera la nature et l'équation.

La courbe représentative de f admet une asymptote

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	

Verticale d'équation $x = 2$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$

La courbe représentative de f admet aussi une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$.

EXERCICE 3 :

Dans chaque cas :

_ Déterminer les limites ci-dessous en détaillant votre raisonnement.

_ Interpréter graphiquement les limites en mentionnant s'il y a une asymptote verticale, horizontale ou si aucun de ces deux types d'asymptote n'est présente.

1. Soit $g(x) = -5x^3 + 3x^2 - 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

Par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} -5x^3 = +\infty$ et par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 - 2 = +\infty$

Donc par somme des limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$g(x) = x^3\left(-5 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}\right)$ or par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} -5 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3} = -5$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ donc par produit des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Interprétation graphique : pas d'asymptote horizontale, ni verticale.

2. Soit $h(x) = \frac{x+1}{2-x}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} h(x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $2 - x$		$+$	0	$-$	

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} 2 - x = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} x + 1 = 3$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} h(x) = +\infty$

Interprétation graphique : la courbe représentative de h admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$ (à gauche de 2, au vu de la limite calculée, mais puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} h(x) = -\infty$, c'est aussi le cas à droite)

3. Soit $l(x) = \frac{e^{x+1}}{(x+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} l(x)$.

$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x+1}}{(x+1)^2} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X^2} = +\infty$ par croissance comparée.

Par somme on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} l(x) = +\infty$

Interprétation graphique : pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

4. Soit $f(x) = e^x - e^{2x} + x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$f(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{e^x} - 1 + \frac{x}{e^{2x}}\right)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée donc par somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x} - 1 + \frac{x}{e^{2x}}\right) = -1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Interprétation graphique : pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

QUESTION BONUS

Déterminer l'une de ces trois limites au choix.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt{x+1}$

$\sqrt{x}-\sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

OR par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}+\sqrt{x+1} = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt{x+1} = 0$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}} \frac{5-x}{x^2-10x+25}$

$\frac{5-x}{x^2-10x+25} = \frac{5-x}{(5-x)^2} = \frac{1}{5-x}$

Or

x	$-\infty$ 5 $+\infty$
Signe de $5-x$	$+$ 0 $-$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}}(5-x) = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}} \frac{1}{5-x} = +\infty$ soit $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}} \frac{5-x}{x^2-10x+25} = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\to1} \frac{e^x-e}{x-1}$

Cours de 1ère : $f'(a) = \lim\limits_{h\to0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ il existe une autre version qui sera celle utilisée dans cet exercices, $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Posons $f(x) = e^x$, on a alors $\lim\limits_{x\to1} \frac{e^x-e}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ au vu du précédent rappel.

Or $f'(x) = e^x$ $donc$ $f'(1) = e$ d'où $\lim\limits_{x\to1} \frac{e^x-e}{x-1} = e$