Éléments de correction de l'interrogation n°6

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes, entourer la bonne réponse. Aucune justification n'est attendue.

1. Si une fonction a une valeur interdite en a, alors sa courbe représentative admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Solution :

a. Vrai $\qquad$ $\boxed{\textbf{b.}\ \text{Faux}}$

En effet, la fonction $f : x \to \dfrac{x-5}{x^2-25}$ a deux valeurs interdites qui sont 5 et -5.

Or : $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2-25} = \dfrac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \dfrac{1}{(x+5)}$, donc : $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \dfrac{1}{10}$, il n'y a donc pas d'asymptote verticale d'équation $y = 5$.

2. On a $f(x) \geqslant \dfrac{1}{x^3}$ sur $]-\infty\,;\,0[$, déterminer si possible $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Solution :

a. 0 $\qquad$ **b.** $+\infty$ $\qquad$ **c.** $-\infty$ $\qquad$ $\boxed{\textbf{d.}\ \text{On ne peut pas savoir}}$

En effet, les cas **a.** et **b.** sont tous les deux possibles :

Soit $f_1 : x \to e^x$: on a $f_1(x) \geqslant \dfrac{1}{x^3}$ sur $]-\infty\,;\,0[$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 0$

Soit $f_2 : x \to x^2$: on a $f_2(x) \geqslant \dfrac{1}{x^3}$ sur $]-\infty\,;\,0[$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = +\infty$

3. On a $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant e^{x^2+1}$ sur $]-\infty\,;\,0[$, déterminer si possible $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Solution :

a. 0 $\qquad$ **b.** e $\qquad$ **c.** $+\infty$ $\qquad$ $\boxed{\textbf{d.}\ \text{On ne peut pas savoir}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2+1} = +\infty$, on ne peut donc pas appliquer le théorème des gendarmes.

Les cas **a.**, **b.** et **c.** sont tous les trois possibles :

Soit $f_1 : x \to e^{x^2}$: on a $\dfrac{1}{x} \leqslant f_1(x) \leqslant e^{x^2+1}$ sur $]-\infty\,;\,0[$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$

Soit $f_2 : x \to e$: on a $\dfrac{1}{x} \leqslant f_2(x) \leqslant e^{x^2+1}$ sur $]-\infty\,;\,0[$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = e$

Soit $f_3 : x \to \dfrac{1}{x-1}$: on a $\dfrac{1}{x} \leqslant f_3(x) \leqslant e^{x^2+1}$ sur $]-\infty\,;\,0[$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = 0$

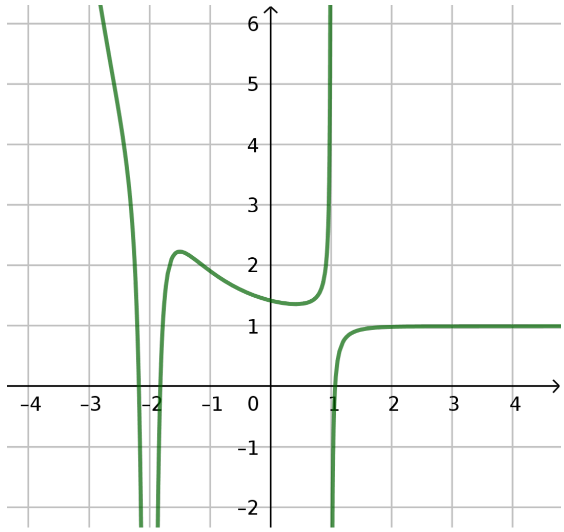
4. **Entourer** les formes indéterminées parmi les propositions suivantes, puis surligner celles qui sont **directement** liées à une croissance comparée.

Solution :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} x - e^{-2x}$ $\qquad$ **b.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{1-\sqrt{x}}$ $\qquad$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{3x}$ $\qquad$ $\boxed{\textbf{d.}\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^x}}$

Exercice 2

Voici la courbe représentative d'une fonction f



1. Compléter par lecture graphique :

Solution : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

2. Conjecturer graphiquement les limites à gauche et à droite de la fonction f en 1.

Solution : $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

3. Combien la courbe représentative de f a-t-elle d'asymptote(s) horizontale(s) ? Expliciter la (ou les) équation(s).

Solution : La courbe représentative de f a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

4. Combien la courbe représentative de f a-t-elle d'asymptote(s) verticale(s) ? Expliciter la (ou les) équation(s).

Solution : La courbe représentative de f a 2 asymptotes verticales d'équation $x = -2$ et $x = 1$.

5. Voici le tableau de variations d'une fonction g. En déduire la (ou les) asymptote(s) à la courbe représentative de g dont on donnera la nature et l'équation.

x	$-\infty$	-2		7	$+\infty$
Variations de g	-10 ↘	$-\infty$ ‖	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Solution : La courbe représentative de g a une asymptote horizontale d'équation $y = -10$ en $-\infty$ et une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

Exercice 3

Dans chaque cas :

- Déterminer les limites ci-dessous en détaillant votre raisonnement.
- Interpréter graphiquement les limites en mentionnant s'il y a une asymptote verticale, horizontale ou si aucune de ces deux types d'asymptote n'est présente.

1. $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$, où $f(x) = \dfrac{3-2x}{x^2-25}$

Solution : Par somme, $\lim\limits_{x\to 5^+} 3-2x = -7$ et $\lim\limits_{x\to 5^+} x^2-25 = 0^+$, donc par quotient, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = -\infty$.
La courbe représentative de f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$, où $g(x) = x^2 - e^{3x} + e^{2x}$

Solution : $g(x) = x^2 - e^{3x} + e^{2x} = e^{3x}\left(\dfrac{x^2}{e^{3x}} - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = e^{3x}\left(\dfrac{1}{9} \times \dfrac{(3x)^2}{e^{3x}} - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

Or, $\dfrac{(3x)^2}{e^{3x}} = \dfrac{1}{\dfrac{e^{3x}}{(3x)^2}} = \dfrac{1}{\dfrac{e^X}{X^2}}$, avec $X = 3x$, et par croissance comparée, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{(3x)^2} = +\infty$,

donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^{3x}}{(3x)^2}} = 0$, puis par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{9} \times \dfrac{(3x)^2}{e^{3x}} - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{9} \times 0 - 1 + 0 = -1$.

Enfin, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Cette limite ne permet pas de détecter une asymptote en $+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$, où $h(x) = 2x^4 - 5x + 1$

Solution :

Limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^4 = \lim\limits_{x\to+\infty} -5x = +\infty$, donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$: $h(x) = 2x^4 - 5x + 1 = x^4\left(2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^4} = 2$, donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

Ces limites ne permettent pas de détecter une asymptote en $+\infty$ ni en $-\infty$.

Exercice Bonus

Déterminer la limite suivante en détaillant votre raisonnement : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}}{x}$

Solution :

Nous avons une forme indéterminée, mais nous reconnaissons le taux d'accroissement de la fonction $f : x \to \mathrm{e}^{x+1}$, dérivable en 0.

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$.

Or, $f'(x) = \mathrm{e}^{x+1}$, donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}}{x} = \mathrm{e}^{0+1} = \mathrm{e}$.