Nom : Prénom : Classe : $Term.....$	**INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES N°2_ partie 3** **Modèle_ corrigé**	
Thème : suites et récurrence		***calculatrice autorisée***

EXERCICE 1 :

Cocher la bonne réponse. *Justifier votre réponse.*

1. Si pour tout $n \in N, u_n < 1$ et $u_{n+1} < u_n$ alors la suite (u_n) converge.

VRAI ☐ FAUX ☐ On ne peut pas répondre ☒

On peut prendre 2 contre exemples qui aboutissent à des situations différentes en terme de convergence et qui pourtant vérifient les mêmes hypothèses de départ.

Cas 1 : $u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}$ cette suite est bien décroissante car $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}$ cette fonction est décroissante (fonction inverse) donc la suite définie de façon explicite à partir de f est elle aussi décroissante (soit la condition $u_{n+1} < u_n$ est bien vérifiée).

Pour tout $n \in N$, on a $n \geq 0$ $soit$ $n + 1 \geq 1 > 0$; $\frac{1}{n+1} \leq 1$ donc ; $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$ soit la condition $u_n < 1$ est bien vérifiée.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, on a donc le cas d'une suite (u_n) qui converge.

Cas 2 : $v_n = -n + \frac{1}{2}$ cette suite est bien décroissante car $v_n = f(n)$ avec $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ (fonction affine avec coefficient directeur négatif).

Pour tout $n \in N$, on a $n \geq 0$ $soit$ $-n \leq 0 \Leftrightarrow -n + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$

Les deux conditions sont donc bien vérifiées par la suite (v_n) et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$; nous avons le cas d'une suite qui diverge.

2. Soit la suite $(v_n)_{n \in N}$ définie par $v_n = -2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

VRAI ☒ FAUX ☐ On ne peut pas répondre ☐

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ pour $-1 < q < 1$, or $0 < \frac{3}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

3. La suite $(w_n)_{n \in N}$ définie par $w_n = -5 + \cos(n)$. Cette suite est bornée, donc elle converge.

VRAI ☐ FAUX ☒ On ne peut pas répondre ☐

La suite (w_n) est bornée mais elle ne converge pas car la suite $u_n = \cos n$ n'a pas de limite, donc la suite $u_n - 5$ n'a pas non plus de limite.

EXERCICE 2 :

Déterminer la limite des 2 suites ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$. Vous justifierez clairement vos réponses en faisant mention aux opérations sur les limites.

1. $u_n = \frac{\frac{1}{n}}{n^2+2n+5}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} n^2 + n + 5 = +\infty$ (par somme des limites)

Donc par quotient des limites on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

2. $v_n = 4n^2\left(\frac{-1}{n^3} + \frac{5}{n^2}\right)$

On remarque qu'il s'agit d'une FI $(+\infty \times \mathbf{0})$

$v_n = -\frac{4n^2}{n^3} + \frac{20n^2}{n^2} = -\frac{4}{n} + 20$

Par somme des limites on a $\lim_{n\to+\infty} -\frac{4}{n} + 20 = 20$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 20.$

EXERCICE 3 :

1. Déterminer la limite des deux suites ci-dessous en énonçant la propriété utilisée :

a) Pour tout $n \in N, u_n \geq 3n^2$

Soit $v_n = 3n^2$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Or $u_n \geq v_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'après le théorème de comparaison.

b) Pour tout $n \in N^*, v_n = 2 + \frac{\sin(n)}{n}$

Pour tout $n \in N^*, -1 \leq \sin(n) \leq 1$

$\Leftrightarrow \ -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \ 2 - \frac{1}{n} \leq 2 + \frac{\sin(n)}{n} \leq 2 + \frac{1}{n}$

Soit $w_n = 2 - \frac{1}{n}$ *et* $z_n = 2 + \frac{1}{n}$; or $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = 2$ et $w_n \leq v_n \leq z_n$

On peut alors en déduire d'après le théorème d'encadrement (thm des gendarmes),que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2.$

2. Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in N$ par $\begin{cases} w_{n+1} = f(w_n) \ avec \ f(x) = \sqrt{x+2} \\ w_0 = 1 \end{cases}$

a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in N, w_{n+1} \geq w_n \geq 1$

Pour tout entier naturel *n*, on note *P(n) :* $\{w_{n+1} \geq w_n \geq 1\}$

<u>Initialisation</u> : $w_1 = f(w_0) = f(1) = \sqrt{3}$ or $\sqrt{3} > 1$ donc $w_1 > w_0 \geq 1$, $P(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : on suppose qu'il existe un entier *k* pour lequel *P(k)* est vraie (c'est-à-dire qu'il existe un entier *k* pour lequel $\mathrm{w}_{\mathrm{k}+1} \geq w_k \geq 1)$

On veut montrer qu'alors *P(k+1)* est vraie (c'est-à-dire $\mathrm{w}_{\mathrm{k}+2} \geq w_{k+1} \geq 1)$

d'après $P(k)$: $\mathrm{w}_{\mathrm{k}+1} \geq w_k \geq 1$

Or la fonction f est croissante sur $[-2;+\infty[$ (comme composée de deux fonctions croissantes, la fonction racine carrée et la fonction affine $x \mapsto x+2$)
Donc $f(w_{k+1}) \geq f(w_k) \geq f(1)$ soit $w_{k+2} \geq w_{k+1} \geq \sqrt{3} \geq 1$
Donc *P(k+1)* est vraie

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel *n, P(n)* est vraie ; c'est-à-dire que pour tout entier naturel *n* $w_{n+1} \geq w_n \geq 1$.

Remarque : pour la partie hérédité, on peut ne pas faire mention de f et présenter comme suit
d'après $P(k)$: $w_{k+1} \geq w_k \geq 1$
$w_{k+1} + 2 \geq w_k + 2 \geq 1 + 2$
$\sqrt{w_{k+1} + 2} \geq \sqrt{w_k + 2} \geq \sqrt{3} \geq 1$
Soit $w_{k+2} \geq w_{k+1} \geq 1$
Donc P(k+1) est vraie

b. On admettra que pour tout $n \in N, 1 \leq w_n \leq w_{n+1} \leq 2$. En déduire que la suite (w_n) converge vers un réel l.

La suite (w_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge.

c. On admet que $l = f(l)\ et\ l \in [1;2]$, déterminer la limite de la suite (w_n).

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow x+2 = x^2\ avec\ x \in [-2;+\infty[$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0\ avec\ x \in [-2;+\infty[$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9;\ \ x_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1\ \ et\ x_2 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$$

Puisque $l \in [1;2]$, alors on en déduit que $l = 2$.