Éléments de correction de l'interrogation n°5

Exercice 1
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse ou si on ne peut pas répondre. Vous justifierez votre réponse.

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$ et $u_{n+1} > u_n$ alors la suite (u_n) converge.

Solution : **Vrai**, en effet :

- comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$, la suite (u_n) est majorée par 1.
- comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, la suite (u_n) est croissante.

La suite (u_n) étant croissante et majorée, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

2. Soit la suite $(v_n)_{\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = -2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Solution : **Faux**, en effet :
Comme $\frac{5}{3} > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$, puis, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

3. Soit $(w_n)_{\in\mathbb{N}}$ suite bornée. On peut dire que $(w_n)_{\in\mathbb{N}}$ est bornée **donc** $(w_n)_{\in\mathbb{N}}$ ne diverge ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ **donc** $(w_n)_{\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution : **Faux**, en effet :
Prenons par exemple la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = (-1)^n$. Cette suite :

- est bien bornée (par -1 et 1).
- ne diverge ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$
- ne converge pas, car elle prend alternativement les valeurs -1 et 1.

La dernière partie de l'affirmation est donc fausse.

Exercice 2
Déterminer la limite des 2 suites ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$:

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \frac{2}{n^3}\left(5n^2 - 4n\right)$

Solution : On remarque qu'il s'agit d'une forme indéterminée (du type "$\infty \times 0$"), donc on développe l'expression pour lever l'indétermination :
$u_n = \frac{2}{n^3}\left(5n^2 - 4n\right) = \frac{2 \times 5n^2}{n^3} - \frac{2 \times 4n}{n^3} = \frac{10}{n} - \frac{8}{n^2}$.
Donc, par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : w_n = \dfrac{5 - \sqrt{n}}{-\frac{2}{n^2}}$

Solution :
Au numérateur : par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - \sqrt{n} = -\infty$.
Au dénominateur : par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{n^2} = 0^-$.

Donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

Exercice 3

Déterminer la limite des deux suites ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$ en énonçant la propriété utilisée :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \dfrac{(-1)^n+2}{n^2} - 8$

> **Solution :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
>
> $$\begin{aligned} -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 &\Longleftrightarrow 1 \leqslant (-1)^n + 2 \leqslant 3 \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{(-1)^n+2}{n^2} \leqslant \frac{3}{n^2} \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{n^2} - 8 \leqslant \frac{(-1)^n+2}{n^2} - 8 \leqslant \frac{3}{n^2} - 8 \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{n^2} - 8 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{n^2} - 8 \end{aligned}$$
>
> Or, par somme, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} - 8 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} - 8 = -8.$
> Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -8.$

2. $\forall n \in \mathbb{N} : v_n \leqslant 4 - n^3$

> **Solution :** Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 - n^3 = -\infty$, et comme $\forall n \in \mathbb{N} : v_n \leqslant 4 - n^3$, par le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exercice 4

Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_0 = 11$ et $w_{n+1} = f(w_n)$ où $f : x \to \sqrt{x+5}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n \geqslant w_{n+1} \geqslant 2$

> **Solution :** Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la double inégalité $w_n \geqslant w_{n+1} \geqslant 2$.
>
> ***Initialisation*** : calculons w_1 : $w_1 = f(w_0) = \sqrt{11+5} = \sqrt{16} = 4$.
> On a donc : $11 \geqslant 4 \geqslant 2$, c'est-à-dire $w_0 \geqslant w_1 \geqslant 2$. Donc $P(0)$ est vraie.
>
> ***Hérédité*** : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $P(k)$ est vraie (c'est-à-dire $w_k \geqslant w_{k+1} \geqslant 2$).
> On veut montrer qu'alors $P(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire $w_{k+1} \geqslant w_{k+2} \geqslant 2$)
> D'après l'hypothèse de récurrence :
>
> $$\begin{aligned} w_k \geqslant w_{k+1} \geqslant 2 &\Longleftrightarrow w_k + 5 \geqslant w_{k+1} + 5 \geqslant 7 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{w_k+5} \geqslant \sqrt{w_{k+1}+5} \geqslant \sqrt{7}, \text{ par croissance de la fonction racine carrée sur } \mathbb{R}^+ \\ &\Longleftrightarrow w_{k+1} \geqslant w_{k+2} \geqslant \sqrt{7} \approx 2{,}6 \\ &\Longrightarrow w_{k+1} \geqslant w_{k+2} \geqslant 2 \end{aligned}$$
>
> Donc $P(k+1)$ est vraie.
>
> ***Conclusion*** : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie ; c'est-à-dire que pour tout entier naturel n : $w_n \geqslant w_{n+1} \geqslant 2$.

2. En déduire que la suite (w_n) converge vers un réel ℓ.

> **Solution :** D'après la question précédente, (w_n) est une suite décroissante et minorée par 2, donc elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

3. On admet que $\ell = f(\ell)$, déterminer la limite de la suite (w_n).

Solution :

$$\begin{aligned}
\ell = f(\ell) &\Longleftrightarrow \ell = \sqrt{\ell+5} \\
&\Longleftrightarrow \ell^2 = \ell + 5, \text{ car } \ell \geqslant 2 > 0 \\
&\Longleftrightarrow \ell^2 - \ell - 5 = 0
\end{aligned}$$

C'est une équation polynomiale du second degré. On calcule le discriminant :
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 1 + 20 = 21 > 0$.
Il y a donc deux solution à l'équation : $\ell_1 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \geqslant 2$ et $\ell_2 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \leqslant 2$.
Comme la suite est minorée par 2, on a donc finalement : $\ell = \ell_1 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$