Nom : Prénom : Classe : $Term$.....	**INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES Nº2_ partie 2** **Modèle _ corrigé**	
Thème : suites et récurrence		***calculatrice autorisée*** **_ 5min**

EXERCICE 1 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = -2n^2 + 1$.

1. Pour tout réel $A < 0$, déterminer le plus petit entier naturel N, tel que pour tout $n \geq N,\ u_n < A$.
   Au brouillon, le travail à mener mais à ne pas écrire sur la copie, on cherche la valeur de n À partir de laquelle on a $u_n < A$ soit $-2n^2 + 1 < A$ on résout alors cette inéquation afin de déterminer cette valeur de n.
   $-2n^2 + 1 < A \Leftrightarrow -2n^2 < A - 1 \Leftrightarrow n^2 > \frac{A-1}{-2} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{A-1}{-2}}$ *car* $n \in N$.
   On remarque alors que brouillon qu'il faudra poser $N = E\left(\sqrt{\frac{A-1}{-2}}\right) + 1 = E\left(\sqrt{\frac{1-A}{2}}\right)$
   Remarque : comme il s'agit de prendre A<0, et de montrer une limite égale à $-\infty$, A va nécessairement être inférieur à -1 et le nombre $\sqrt{\frac{1-A}{2}}$ *existe bien car* $\frac{1-A}{2} > 0$.
   Au propre :
   Quelque soit A <0, il existe $N = E\left(\sqrt{\frac{A-1}{-2}}\right) + 1 > \sqrt{\frac{A-1}{-2}}$ tel que pour tout $n \geq N$ $on\ a$:
$$n \geq N > \sqrt{\frac{A-1}{-2}}$$
$$n^2 > \frac{A-1}{-2}$$
$$-2n^2 < A - 1$$
$$-2n^2 + 1 < A$$

Soit $\boldsymbol{u_n < A}$

2. En déduire la limite de la suite (u_n) en faisant clairement apparaître la définition utilisée.

Puisque nous avons montré que :

Quelque soit A <0, il existe $N = E\left(\sqrt{\frac{A-1}{-2}}\right) + 1 > \sqrt{\frac{A-1}{-2}}$ tel que pour tout $n \geq N$ $on\ a$ $u_n < A$ cela signifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

EXERCICE 2 :

Déterminer la limite des 4 suites ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$. Vous justifierez clairement vos réponses en faisant mention aux opérations sur les limites.

1. $u_n = 5n^2 - 2n + 1$

Remarque: en faisant une 1ère recherche on s'aperçoit qu'il s'agit d'une forme indéterminée ($+\infty - \infty$), on présente donc directement sur sa copie la transformation de l'écriture de u_n qui permet de lever cette indéterminée, ici il s'agit de factoriser par le monôme de plus haut degré.

$u_n = n^2\left(5 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(5 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 5$, par produit des limites on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2. $v_n = (6n - \frac{4}{n})(-\sqrt{n} + 1)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 6n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$ *donc par somme* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(6n - \frac{4}{n}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\sqrt{n} + 1\right) = -\infty$ ainsi par produit des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

3. $w_n = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{n+5}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 5 = +\infty$ donc par quotient des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

On peut aussi le démontrer de la façon suivante :

$w_n = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{n+5} = \dfrac{1}{n^2(n+5)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(n+5) = +\infty$ donc par quotient des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

4. $z_n = \frac{3}{n^2}(n+4)$

Remarque: en faisant une 1ère recherche on s'aperçoit qu'il s'agit d'une forme indéterminée ($0 \times \infty$), on présente donc directement sur sa copie la transformation de l'écriture de z_n qui permet de lever cette indéterminée, ici il s'agit développer.

$z_n = \frac{3n}{n^2} + \frac{12}{n^2} = \frac{3}{n} + \frac{12}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{12}{n^2} = 0$ donc par somme de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$