Éléments de correction de l'interrogation n°4

Déterminer les limites des 3 suites ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$:

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \left(5 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(7 + \dfrac{3}{n}\right)$

Solution : Par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 7 + \dfrac{3}{n} = 7$, donc, par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5 \times 7 = 35$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n = \dfrac{-4}{n}\left(n^2+3\right)$

Solution : On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-4}{n} = 0$ et par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+3 = +\infty$. On a une forme indéterminée.
On développe pour lever l'indétermination :
$\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n = \dfrac{-4}{n}\left(n^2+3\right) = \dfrac{-4}{n} \times n^2 + \dfrac{-4}{n} \times 3 = -4n - \dfrac{12}{n}$
Par somme, on peut donc dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^* : w_n = \dfrac{n^2+5}{\frac{1}{n}-2}$

Solution : Par somme, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+5 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} - 2 = -2$.
Puis, par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$

4. $\forall n \in \mathbb{N}^* : z_n = \dfrac{2n^3-5}{3n^2-5n+1}$

Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n = -\infty$, on a donc une forme indéterminée.
On factorise par n^3 au numérateur et par n^2 au dénominateur pour lever l'indétermination :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : z_n = \frac{2n^3-5}{3n^2-5n+1} = \frac{n^3\left(2-\frac{5}{n^3}\right)}{n^2\left(3-\frac{5}{n}+\frac{1}{n}\right)} = \frac{n\left(2-\frac{5}{n^3}\right)}{3-\frac{5}{n}+\frac{1}{n}}$$

Au dénominateur : par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{5}{n^3} = 2$.

Puis, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(2-\dfrac{5}{n^3}\right) = +\infty$

Au numérateur : par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n} = 3$.
Donc, finalement, par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$