Éléments de correction de l'interrogation n°3

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$ *(*)*.
Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 2 \times 3^n - 1$.
La notion tiendra compte de la précision et de la rigueur de la rédaction.

Solution : Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ l'égalité $u_n = 2 \times 3^n - 1$.

Initialisation : $2 \times 3^0 - 1 = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$ et d'après l'énoncé $u_0 = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier k pour lequel $P(k)$ est vraie (c'est-à-dire $u_k = 2 \times 3^k - 1$ *(*)*).
On veut montrer qu'alors $P(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire $u_{k+1} = 2 \times 3^{k+1} - 1$)

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3u_k + 2 \text{ , d'après } (*) \\ &= 3(2 \times 3^k - 1) + 2 \text{ , d'après } (*) \\ &= 2 \times 3^{k+1} - 3 + 2 \\ &= 2 \times 3^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie ; c'est-à-dire que pour tout entier naturel n : $u_n = 2 \times 3^n - 1$.