Nom : Prénom : Classe : $1^{ère}$	**INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES N°1_ partie 2** **MODÈLE_ corrigé**	
Thème : dérivation et convexité		***calculatrice autorisée***

EXERCICE 1 :

1. Si une fonction est convexe sur un intervalle sur I, sa courbe représentative est située au-dessus de ses tangentes.

VRAI ☒ FAUX ☐

2. Si une fonction est concave sur un intervalle I, sa courbe représentative est située en-dessous de tous les segments dont les extrémités appartiennent à la courbe représentative de la fonction et dont les abscisses appartiennent à I. VRAI ☐ FAUX ☒

3. Soient f et g deux fonctions telles que f est concave sur I et g est convexe sur le même intervalle I, alors $f - g$ est une fonction concave sur I. VRAI ☒ FAUX ☐

$(f-g)'' = f'' - g''$ or f est concave sur I donc $f''(x) \leq 0$ pour $x \in I$, et g est convexe sur I donc $g''(x) \geq 0$ pour $x \in I, soit -g''(x) \leq 0$ ainsi $f''(x) + \left(-g''(x)\right) \leq 0$.

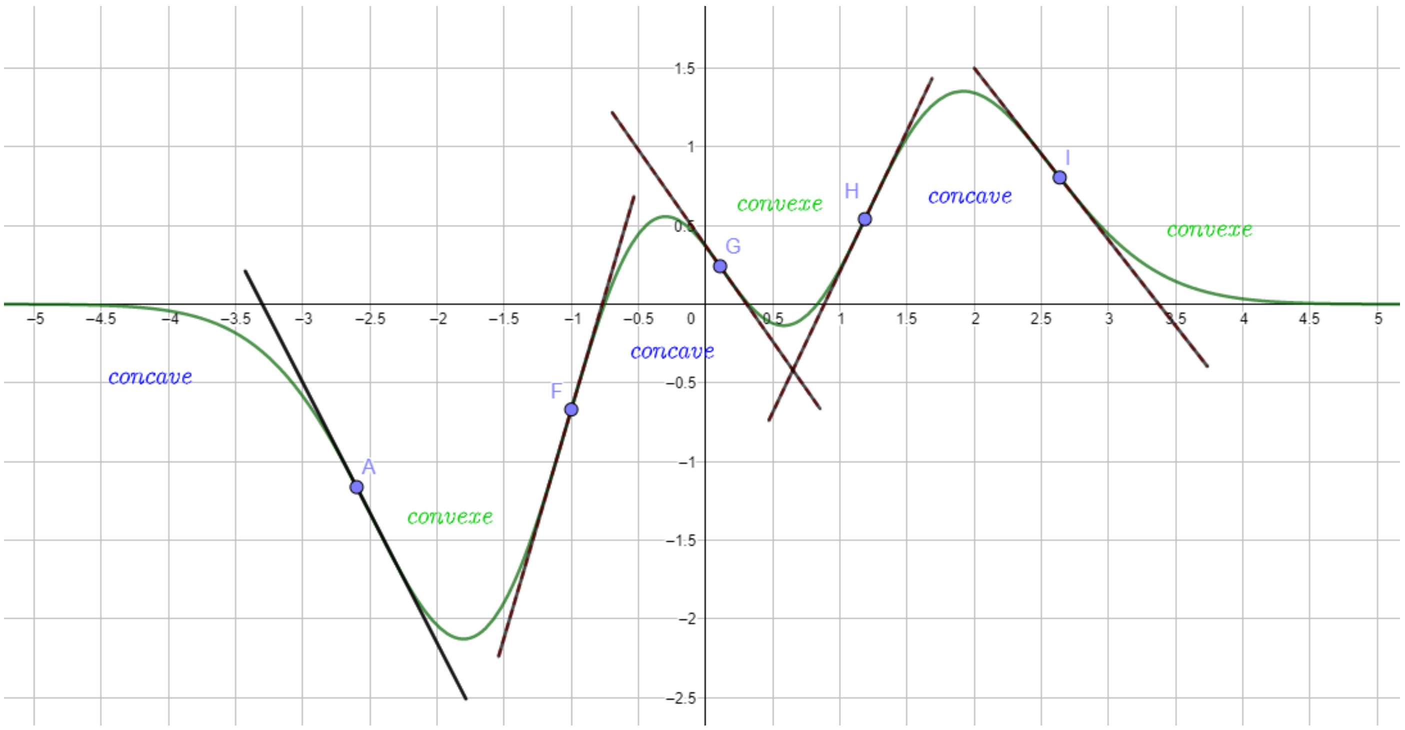
Puisque pour tout $x \in I, (f-g)''(x) \leq 0$; alors la fonction $f - g$ est bien concave sur I.

4. La courbe C_f admet un point d'inflexion sur l'intervalle I, si et seulement si l'équation $f''(x) = 0$ admet une solution sur I. VRAI ☐ FAUX ☒

La dérivée seconde doit également changer de signe.

EXERCICE 2 :

1. Placer approximativement les points d'inflexion sur la courbe, et repasser en bleu les parties de la courbe où la fonction est convexe et en vert celles où elle est concave. Point d'inflexion : A, F, G, H et I.



2. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [0 ;10]. Ci-dessous le tableau de variation de sa dérivée seconde. En déduire la convexité de la fonction f en détaillant votre raisonnement.

x	0		3		5		10
Sens de variation de f''	5	↘	0	↘	-4	↗	-2
signe de $f''(x)$		+	0		-		

Les intervalles sur lesquels $f''(x) \leq 0$, la fonction est concave et ceux sur lesquels $f''(x) \geq 0$, la fonction est convexe, d'où f est convexe sur $[0; 3]$ et concave sur $[3; 10]$.

EXERCICE 3 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6 ; 5]$ dont on connaît le tableau de variations de la fonction dérivée f'.

x	-6		-2		1		2		5
f'	4	↘	0	↗	2	↘	0	↘	-2

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[-6 ; 5]$.

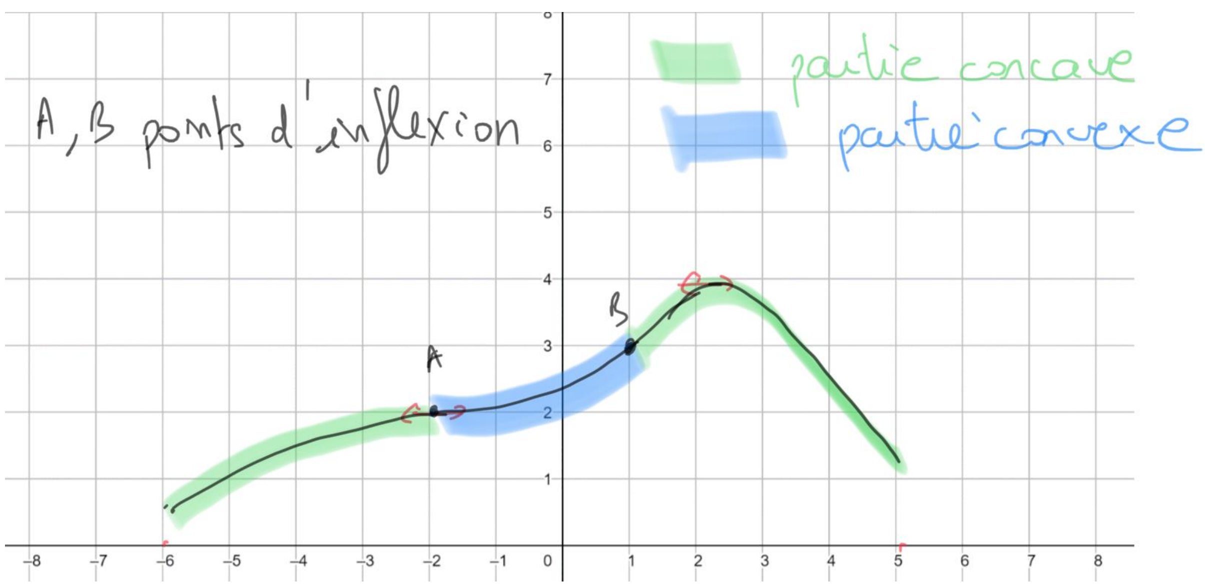
x	-6		2		5
signe de $f'(x)$		+	0	$-$	
variations de f	$f(-6)$	↗	$f(2)$	↘	$f(5)$

2. Déterminer la convexité de la fonction f.

x	-6		-2		1		5
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

´La fonction f est donc concave sur $[-6; -2]$ et sur $[1; 5]$, elle est convexe sur $[-2; 1]$.

3. Tracer dans un repère, une allure de la courbe représentative de la fonction f ainsi que les tangentes horizontales.



EXERCICE 4

Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = (1 + x - x^2)e^{-2x}$.

1. Montrer que $g''(x) = 2e^{-2x}(-2x^2 + 6x - 1)$.

$g'(x) = (1 - 2x) \times e^{-2x} + (1 + x - x^2) \times (-2e^{-2x}) = e^{-2x}(1 - 2x - 2 - 2x + 2x^2) = e^{-2x}(2x^2 - 4x - 1)$

$g''(x) = -2e^{-2x}(2x^2 - 4x - 1) + e^{-2x}(4x - 4) = e^{-2x}(-4x^2 + 8x + 2 + 4x - 4) = e^{-2x}(-4x^2 + 12x - 2)$

$g''(x) = 2e^{-2x}(-2x^2 + 6x - 1)$.

2. Étudier la convexité de la fonction g sur R.

Pour tout $x \in R, 2e^{-2x} > 0$ donc le signe de $g''(x)$ ne dépend que du signe de $(-2x^2 + 6x - 1)$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 28; \Delta > 0$ donc le trinôme de degré 2 admet deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-6-\sqrt{28}}{-4} = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
signe de $g''(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

car $a = -2$ *donc* $a < 0$

La fonction g est donc concave sur $]-\infty; x_2]$ et sur $[x_1; +\infty[$; la fonction est convexe sur $[x_1; x_2]$.

3. En déduire le nombre de point(s) d'inflexion de la courbe représentative de la fonction g. On donnera les coordonnées de ce(s) point(s) d'inflexion.

Une courbe admet des points d'inflexion lorsque la dérivée seconde de la fonction associée à la courbe s'annule en changeant de signe, donc la courbe admet deux points d'inflexion de coordonnées $(x_2; g(x_2))$ *et* $(x_1; g(x_1))$.

<u>remarque :</u> le calcul des coordonnées n'a pas été davantage détaillé car les valeurs de x_2 et x_1 ne sont pas « pratiques », avec des valeurs entières ou fractionnaires de x_1 et x_2 il aurait été préférable de donner la valeur exacte de ces coordonnées.

4.a. Montrer que l'équation de la tangente T_0 à C_g en 0 a pour équation $y = -x + 1$.

$T_0 : y = g'(0)(x - 0) + g(0)$ *soit* $y = -1 \times x + 1$ $(e^0 = 1)$ donc $T_0 : y = -x + 1$.

b. En déduire que pour tout $x \in]-\infty; \frac{3}{20}];\ (1 + x - x^2)e^{-2x} \leq -x + 1$.

$\frac{3}{20} < x_2$ donc la fonction g est concave sur $]-\infty; \frac{3}{20}]$, donc la courbe est en-dessous de ses tangentes sur cet intervalle, notamment en dessous de T_0 puisque $0 \in]-\infty; \frac{3}{20}]$ d'où :

$g(x) \leq -x + 1$ c'est-à-dire $(1 + x - x^2)e^{-2x} \leq -x + 1$, pour tout $x \in]-\infty; \frac{3}{20}]$.