Éléments de correction de l'interrogation écrite n°2

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse sans justifier.

1. Si une fonction est convexe sur un intervalle I, sa courbe représentative est située en-dessous de ses tangentes.

> **Solution : FAUX**, c'est le contraire !

2. Si une fonction est convexe sur un intervalle I, sa courbe représentative est située en-dessous de tous les segments dont les extrémités appartiennent à la courbe représentative de la fonction et dont les abscisses appartiennent à I.

> **Solution : VRAI**, les segments mentionnés dans l'énoncé sont les **cordes** ou les **sécantes** à la courbe représentative de la fonction.

3. Soient f et g deux fonctions telles que f est concave sur I et g est concave sur le même intervalle I, alors $f - g$ est une fonction concave sur I.

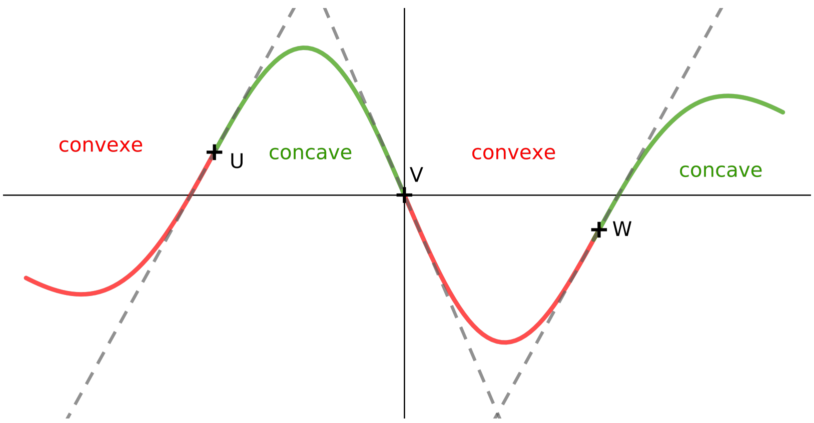
> **Solution : FAUX** : $\forall x \in I$, $(f-g)''(x) = f''(x) - g''(x)$. Or :
> - f est concave sur I donc $\forall x \in I, f''(x) \leqslant 0$
> - g est concave sur I donc $\forall x \in I, g''(x) \leqslant 0$, soit : $-g''(x) \geqslant 0$
>
> On a alors $(f-g)''(x) = f''(x) - g''(x) = f''(x) + (-g''(x))$ qui est la somme de deux fonctions de signe contraire, on ne peut donc pas se prononcer de façon générale sur le signe de cette somme.

4. La courbe C_f admet un point d'inflexion sur un intervalle I ouvert, si et seulement si la fonction f' admet un extremum sur I.

> **Solution : VRAI** : f' admet un extremum, signifie que sa dérivée s'annule en changeant de signe, donc que f'' s'annule en changeant de signe, ce qui signifie qu'il y a bien la présence d'un point d'inflexion.

Exercice 2

1. Placer approximativement les points d'inflexion sur la courbe, et repasser en rouge les parties de la courbe où la fonction est convexe et en vert celles où elle est concave.

> **Solution :** U, V et W sont les 3 points d'inflexion.
>
> 
>

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$. Ci-dessous le tableau de variation de sa dérivée seconde. Étudier la convexité de la fonction f en détaillant votre raisonnement.

x	-4		1		2		4
Variations de f''	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

Solution : Les intervalles sur lesquels $f''(x) \leqslant 0$, la fonction f est concave et ceux sur lesquels $f''(x) \geqslant 0$, la fonction f est convexe. Donc, f est convexe sur $[-4\,;\,2]$ et concave sur $[2\,;\,4]$.

Exercice 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\,;\,10]$. On a de plus le tableau de variation suivant :

x	-5		-2		0		2		10
Variations de f'	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[-5\,;\,10]$.

Solution :

x	-5		2		10
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$f(-5)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(10)$

2. Déterminer la convexité de la fonction f sur $[-5\,;\,10]$.

Solution :

x	-5		-2		0		10
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f est donc convexe sur $[-5\,;\,-2]$ et sur $[0\,;\,10]$; et elle est concave sur $[-2\,;\,0]$.

Exercice 4

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2-2x^2)e^{-0,5x}$.

1. Montrer que $g''(x) = \dfrac{1}{2}e^{-0,5x}(1-x)(x-7)$.

> **Solution :** $g'(x) = -4xe^{-0,5x} + (2-2x^2) \times (-0,5)\text{Ö}e^{-0,5x} = e^{-0,5x}(-4x-1+x^2)$.
> $g''(x) = -0,5e^{-0,5x}(-4x-1+x^2) + e^{-0,5x}(-4+2x) = e^{-0,5x}(2x+0,5-0,5x^2-4+2x)$
> $g''(x) = e^{-0,5x}(-0,5x^2+4x-3,5) = 0,5e^{-0,5x}(-x^2+8x-7)$
> Or : $(1-x)(x-7) = x-7-x^2+7x = -x^2+8x-7$ donc on a bien : $g''(x) = \dfrac{1}{2}e^{-0,5x}(1-x)(x-7)$.
> *Remarque : on peut aussi calculer le discriminant pour trouver les racines de* $-x^2+8x-7$, *on trouve que* $x_1 = 1$ *et* $x_2 = 7$, *ce qui permet de faire une factorisation du type* $a(x-x_1)(x-x_2)$.

2. Étudier la convexité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

> **Solution :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{2}e^{-0,5x} > 0$, $g''(x)$ est donc du signe de $(1-x)(x-7)$:

x	∞		1		7		$+\infty$
Signe de $1-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	
Signe de $x-7$		$-$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $g''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

> La fonction g est donc concave sur $]-\infty\,;\,1]$ et sur $[7\,;\,+\infty[$; et elle est convexe sur $[1\,;\,7]$.

3. En déduire le nombre de point(s) d'inflexion de la courbe représentative de la fonction g. On donnera les coordonnées exactes de ce(s) point(s) d'inflexion.

> **Solution :** Une courbe admet des points d'inflexion lorsque la dérivée seconde de la fonction associée à la courbe s'annule en changeant de signe, donc la courbe admet deux points d'inflexion de coordonnées $(1\,;\,g(1))$ et $(7\,;\,g(7))$. Or, $g(1) = 0$ et $g(7) = -96e^{-3,5}$.
> Les points d'inflexion ont donc pour coordonnées : $(1\,;\,0)$ et $(7\,;\,-96e^{-3,5})$.

4. **a.** Montrer que l'équation de la tangente T_0 à C_g en 0 a pour équation $y = -x+2$.

> **Solution :** L'équation de la tangente T_0 est : $y = g'(0)(x-0)+g(0)$ soit $y = -1 \times x + 2e^0$.
> Donc $T_0 : y = -x+2$.

b. En déduire que pour tout $x \in]-\infty\,;\,1[$, on a $-x+2 \geqslant (2-2x^2)e^{-0,5x}$.

> **Solution :** La fonction g est concave sur $]-\infty\,;\,1]$ d'après la question 2, donc la courbe est en-dessous de ses tangentes sur cet intervalle, notamment en dessous de T_0 puisque $0 \in]-\infty\,;\,1]$ d'où :
> $\forall x \in]-\infty\,;\,1]$, $-x+2 \geqslant g(x)$ c'est-à-dire $\forall x \in]-\infty\,;\,1]$, $-x+2 \geqslant (2-2x^2)e^{-0,5x}$.

Question bonus : question supplémentaire à l'exercice 3
Tracer dans un repère, une allure de la courbe représentative de la fonction f ainsi que les tangentes horizontales.