Nom : Prénom : Classe : Term. …..	**INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES N°12_ entraînement_corrigé**	

Thème : fonctions sinus et cosinus	***calculatrice autoriseé***

OBJECTIFS ÉVALUÉS
1. Résoudre une équation du type cos(x) = a, une inéquation de la forme cos(x) ⩽ a sur [-π,π].
2. Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum. → dans la cadre de cet objectif, savoir notamment dériver des fonctions trigonométriques

EXERCICE 1 : objectif 2

1. Dériver la fonction $g(x) = cos(3x + \frac{\pi}{4})$.

$g'(x) = -3\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

2. Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 2cos\ (2x)\ - 1$.

a. Montrer que la fonction est π-périodique.

$\forall x \in R, f(x+\pi) = 2\cos(2(x+\pi)) - 1 = 2\cos(2x+2\pi) - 1 = 2\cos(2x) - 1$ car la fonction cos est 2π-périodique, on a donc $f(x+\pi) = f(x)$ la fonction f est donc π −périodique

b. Étudier la parité de la fonction f.

$\forall x \in R; f(-x) = 2\cos\big(2(-x)\big) - 1 = 2\cos(2x) - 1$ car la fonction cos est paire

On a donc $f(-x) = f(x)$ la fonction f est donc paire.

c. En déduire qu'il est possible de restreindre l'étude de f à $[0; \frac{\pi}{2}]$.

La fonction f est π-périodique on peut restreindre son étude à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction f est paire, on peut restreindre son étude à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ce qui nous permettra d'en déduire ensuite son comportement sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

d. Étudier le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle et en déduire le tableau de variations de f sur $[-\pi; \pi]$.

$f'(x) = -4\sin(2x)$

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 2x \in [0;\pi] \Leftrightarrow \sin(2x) \geq 0 \Leftrightarrow -4\sin(2x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0
Sens de variation de f	1	↘	-3

La fonction f étant paire, nous pouvons la compléter sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
Sens de variation de f	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3

La fonction f étant π −périodique, nous pouvons compléter le tableau sur $[-\pi;\pi]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
Sens de variation de f	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

<u>EXERCICE 2 :</u> objectif 1

1. Résoudre sur R puis sur $]-\pi;\pi]$ les équations :

a) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad ou\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ou \quad x=-\pi+2k\pi$

$S_R=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;-\pi+2k\pi\right\}$

$S_{]-\pi;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{3}\ (k=0\ dans\ le\ 1er\ cas);\pi\ (k=1\ dans\ le\ 2ème\ cas)\right\}$

b) $\sin(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ \ ou\ 2x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{8}+k\pi$

$S_R=\left\{\frac{\pi}{8}+k\pi;\ x=\frac{3\pi}{8}+k\pi; k\in Z\right\}$

On veut également les solutions sur $]-\pi;\pi]$pour cela il faut que :

$$-\pi<\frac{\pi}{8}+k\pi\leq\pi\Leftrightarrow-\frac{9\pi}{8}<k\pi\leq\frac{7\pi}{8}\Leftrightarrow-\frac{9}{8}<k\leq\frac{7\pi}{8}\Leftrightarrow k=-1\ ou\ k=0$$

On a alors comme solutions $x=-\frac{7\pi}{8}\ (pour\ k=-1)ou\ x=\frac{\pi}{8}\ (pour\ k=0)$

$$-\pi<\frac{3\pi}{8}+k\pi\leq\pi\Leftrightarrow-\frac{11\pi}{8}<k\pi\leq\frac{5\pi}{8}\Leftrightarrow-\frac{11}{8}<k\leq\frac{5}{8}\Leftrightarrow k=-1\ ou\ k=0$$

On a alors comme solutions $x=-\frac{5\pi}{8}\ \ (pour\ k=-1)ou\ x=\frac{3\pi}{8}\ (pour\ k=0)$

$s_{1]-\pi;\pi]}=\left\{-\frac{5\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right\}$

2. Résoudre sur $[0; 2\pi[$ les inéquations :

a) $\cos(x-\pi) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ (E)

$x \in [0; 2\pi[\Leftrightarrow x - \pi \in [-\pi, \pi[$

On pose $X = x - \pi; (E) \Leftrightarrow \cos X > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X \in]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}[\Leftrightarrow X + \pi = x \in]\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}[$

b) $-2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 1$ (E')

$x \in [0; 2\pi[\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}[$

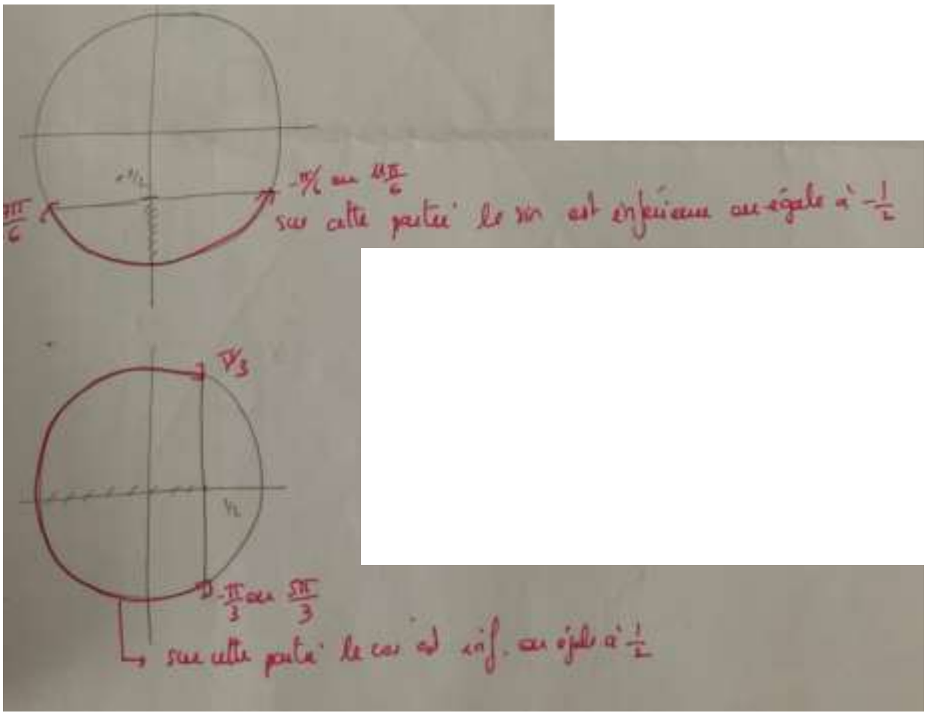
On pose $X = x + \frac{\pi}{4}; (E') \Leftrightarrow -2\sin X \geq 1 \Leftrightarrow \sin X \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow X \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right] \Leftrightarrow X - \frac{\pi}{4} = x \in \left[\frac{11\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}\right]$

c) Résoudre sur $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}[$ l'inéquation $\cos(3x) \leq \frac{1}{2}$ (E)

$x \in [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}[\Leftrightarrow 3x \in [-\pi; \pi[$

On pose $X = 3x$

$(E) \Leftrightarrow \cos X \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow X \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi[\Leftrightarrow \frac{X}{3} = x \in \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{9}\right] \cup [\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{3}[$



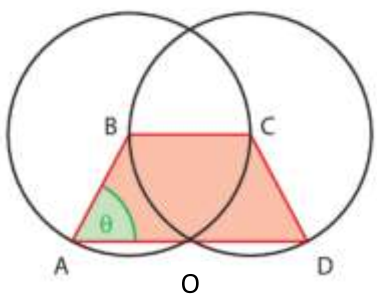
<u>EXERCICE 3</u>: OBJECTIF 2

[BC] est un segment de longueur 1cm et le 1er cercle a pour centre B et rayon 1cm ; le 2ème cercle a pour centre C et pour rayon 1 cm. A est un point du 1er cercle et ABCD est un trapèze isocèle tel que AB=BC=CD=1cm.

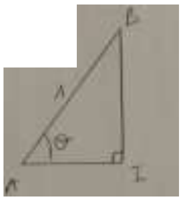
On note θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{BAD}$.

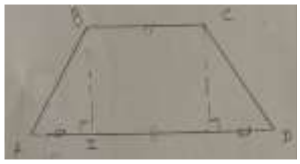
Quelle doit être la valeur de cet angle afin que l'aire de ABCD

soit maximale.



AB=BO=rayon ; le triangle ABO est alors isocèle en B, donc la hauteur issue de B est aussi médiatrice, soit $AO = 2AI.$´





Dans le triangle ABI rectangle en I, $\cos\theta = \frac{AI}{AB} \Leftrightarrow \cos\theta = AI$

Dans le triangle Abi rectangle en I, $\sin\theta = \frac{BI}{AB} \Leftrightarrow \sin\theta = BI$

$$A_{ABCD} = \frac{(BC + AD)\times BI}{2} = \frac{(1 + AI \times 2 + 1)\times BI}{2} = \frac{(2 + 2\cos\theta)\times\sin\theta}{2} = (1+\cos\theta)\times\sin\theta$$

On pose $f(x) = (1+\cos x)\sin x$ avec x la mesure de l'angle.

$$f'(x) = -\sin x \sin x + (1+\cos x)\cos x = -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x = \cos^2 x - 1 + \cos x + \cos^2 x$$
$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

On pose $X = \cos x$ on a alors $2X^2 + X - 1$.

$$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9; X_1 = \frac{-1-3}{4} = -1 \ \ et\ X_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

On peut alors factoriser le polynôme sous la forme :

$2X^2 + X - 1 = 2(X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$ soit $f(x) = 2(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$

Or pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x + 1 > 0\ et\ 2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $\cos x - \frac{1}{2}$.

Il s'agit donc de résoudre par exemple $\forall$ x $\in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(\theta)$		+	0	–	
Variation de A	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1

On en déduit que l'aire de ABCD est maximale pour $x = \frac{\pi}{3}$.

<u>EXERCICE BONUS :</u>

Résoudre l'équation $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$

On pose $X = \cos x$; l'équation devient alors : $2X^2 - X - 1 = 0$.

$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9; X_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}\ et\ X_2 = \frac{1+3}{4} = 1$

$$X_1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ \ ou\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$