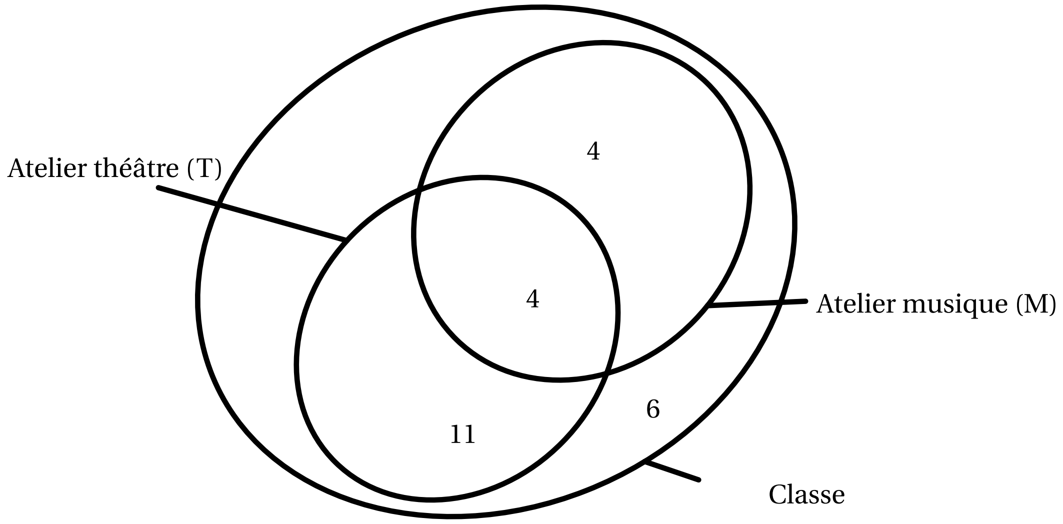
# Éléments de correction de l'interrogation n°15

**Exercice 1** **3,25 points**

Dans une classe de 25 élèves, 15 s'inscrivent à l'atelier théâtre, 8 à l'atelier musique au 4 à ces deux ateliers.

**1.** Remplir le diagramme ci-dessus afin qu'il représente la situation.

**Solution :**




**2.** Déterminer le nombre d'élèves s'inscrivant dans au moins un des deux ateliers.

**Solution :** T est l'ensemble des élèves de l'atelier théâtre et M ceux de l'atelier musique. On cherche donc $\text{Card}(T \cup M)$.
$\text{Card}(T \cup M) = \text{Card}(T) + \text{Card}(M) - \text{Card}(T \cap M)$.
Or 4 s'inscrivent aux deux ateliers donc $\text{Card}(T \cap M) = 4$ soit $\text{Card}(T \cup M) = 15 + 8 - 4 = 19$.
Le nombre d'élèves s'inscrivant dans au moins un des deux ateliers est 19.

**3.** Combien d'élèves ne s'inscrivent ni à l'atelier théâtre, ni à l'atelier musique ?

**Solution :**
Puisque $\text{Card}(T \cup M) = 15 + 8 - 4 = 19$, alors $25 - 19 = 6$ élèves ne s'inscrivent ni à l'atelier théâtre, ni à l'atelier musique.

**Exercice 2** **3,25 points**

**1.** Simplifier l'écriture suivante : $\dfrac{(n+5)!}{(n+7)!}$.

**Solution :** $\dfrac{(n+5)!}{(n+7)!} = \dfrac{(n+5)!}{(n+7)(n+6)(n+5)!} = \dfrac{1}{(n+7)(n+6)}$

**2.** Calculer « à la main » $\dbinom{5}{3}$ en écrivant les calculs et en détaillant les étapes de calcul.

**Solution :** $\dbinom{5}{3} = \dfrac{5!}{3! \times (5-3)!} = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$

3. En vous servant de $\binom{7}{3} = 35$ et $\binom{7}{4} = 35$, donner $\binom{8}{4}$ en justifiant.

> **Solution :** D'après la relation de Pascal : $\binom{8}{4} = \binom{7}{3} + \binom{7}{4} = 35 + 35 = 70$.

**Exercice 3** **3 points**

Jack doit créer un code de sécurité à 6 chiffres pour son smartphone.

1. Combien de codes peut-il créer ?

> **Solution :**
> Il y a 10 choix pour chaque chiffre du code. Il y a donc $10^6$, soit 1000000 codes différents.

2. Il souhaite modifier son code. Il décide de ne jamais utiliser le chiffre 0. Combien de codes peut-il créer ?

> **Solution :**
> Cette fois-ci, il y a 9 choix pour chaque chiffre du code. Il y a donc $9^6$, soit 531441 codes différents.

3. Si maintenant il décide seulement de ne jamais utiliser le même chiffre, mais s'autorise à choisir le 0. Combien de codes peut-il créer ?

> **Solution :**
> Le code sera un 6-arrangement de l'ensemble des 10 chiffres. Donc, il y a en tout $\frac{10!}{(10-6)!}$ codes différents, soit : $\frac{10!}{(10-6)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$ codes possibles.

**Exercice 4** **5,5 points**

Lors d'une partie de Poker, les participants jouent avec un jeu de 52 cartes réparties en 4 couleurs (Pique, Trèfle,Carreau, Cœur).
Pour chaque couleur, il y a 13 valeurs différentes (dix cartes de 1 à 10, un Valet, une Dame et un Roi).
Un joueur tire simultanément 5 cartes.

1. Quel est le nombre de mains de 5 cartes différentes possibles ?

> **Solution :**
> Le nombre de mains de 5 cartes correspond au nombre de combinaisons de 5 cartes parmi 52 soit : $\binom{52}{5} = 2598960$

2. Quel est le nombre de mains avec un full, c'est à dire comprenant 3 cartes de même valeur et 2 cartes d'une autre valeur ? Par exemple :

Roi de Cœur , Roi de trèfle , Roi de Pique , 10 de Carreau , 10 de Pique

> **Solution :**
> - Choix de la valeur des 3 cartes avec la même valeur : $\binom{13}{1} = 13$ choix.

- Choix des 3 couleurs parmi 4 du brelan : $\binom{4}{3} = 4$ choix.
- Choix de la valeur de la paire : $\binom{12}{1} = 12$ choix.
- Choix des 2 couleurs parmi 4 de la paire : $\binom{4}{2} = 6$ choix.

Soit au total un nombre de main avec un full de : $13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744$

**3.** Calculer le nombre de mains contenant **exactement** une paire (soit 2 cartes de même valeur). On exclut les mains avec deux paires ou avec un brelan (3 cartes de la même valeur) ou avec un carré (4 cartes de la même valeur).

**Solution :**

- On commence par compter le nombre de façon d'avoir une paire :
  - Choix de la valeur des cartes de la paire : $\binom{13}{1} = 13$ choix.
  - Choix des 2 couleurs parmi 4 de la paire : $\binom{4}{2} = 6$ choix.
- Pour les trois restantes cartes, on en choisit 3 parmi les 12 autres valeurs afin de ne pas avoir une autre paire ou un brelan :
  - Le nombre de cas possibles pour avoir trois autres valeurs différentes : $\binom{12}{3} = 220$
  - Pour chacune de ces 3 cartes, on a 4 choix possibles de couleur, soit $4^3$ pour les 3 cartes en tout.

Donc finalement, on a : $13 \times 6 \times 220 \times 4^3 = 1098240$ mains possibles avec exactement une paire.

**4.** Calculer le nombre de mains contenant **exactement** deux paires différentes. On exclut les mains avec un brelan (3 cartes de la même valeur) ou avec un carré (4 cartes de la même valeur).

**Solution :** Si notre main se compose de deux paires de valeurs différentes, forcément, la cinquième carte est une carte d'une autre valeur que les valeur des deux paires.

- On commence par compter le nombre de façon d'avoir les deux paires :
  - Choix de la valeur des cartes de la paire : $\binom{13}{2} = 78$ choix.
  - Choix des 2 couleurs parmi 4 pour chaque paire : $\binom{4}{2} = 6$ choix, soit pour les deux paires : $6^2$.
- Pour la carte qui reste, le nombre de cas possibles pour avoir une autre valeur différente est $\binom{11}{1} = 11$, et on a 4 choix possibles pour la couleur.

Finalement, on a : $78 \times 6^2 \times 11 \times 4 = 123552$ mains possibles avec exactement deux paires.