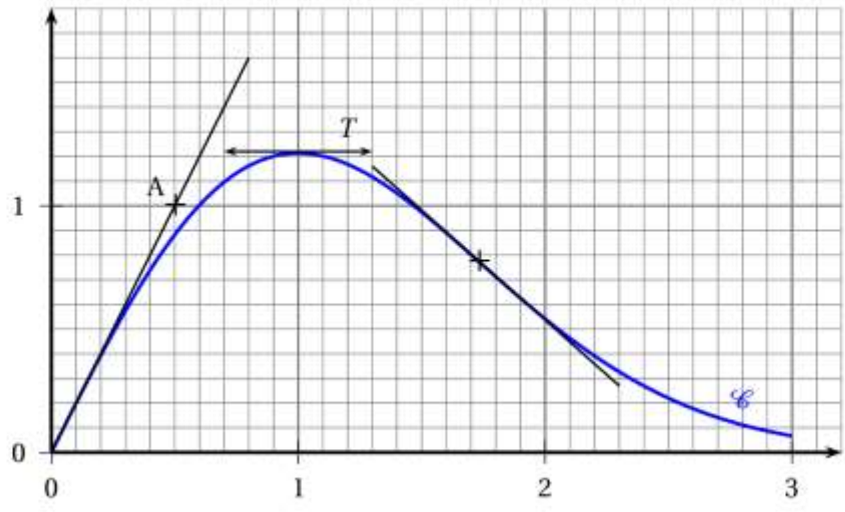
Nom : Prénom : Classe : Term. …..	**INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES N°10_ entraînement**	
Thème : Calcul intégral		***calculatrice autoriseé***

OBJECTIFS ÉVALUÉS
1. Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
2. Calculer une intégrale à l'aide : **(i)** d'une primitive **(ii)** à l'aide d'une intégration par parties
3. Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction
4. Calculer l'aire entre deux courbes.
5. Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
6. Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

EXERCICE 1 : OBJECTIFS 1, 2(i) ET 6

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;3]$. On note f' la fonction dérivée de f.
La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0; elle passe par le point A de coordonnées $(0,5;1)$.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

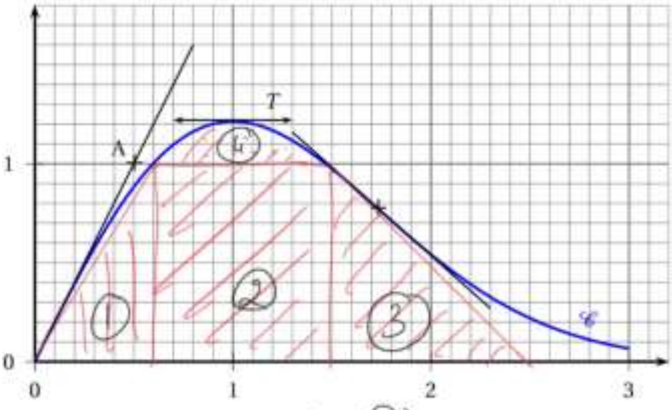


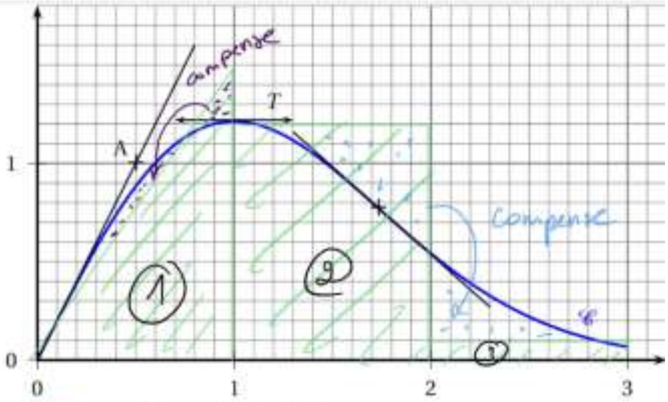
1. Par lecture graphique donner un encadrement de $A = \int_0^3 f(x)\,dx$. Vous utiliserez le graphique ci-contre pour mettre en évidence l'encadrement utilisé et donnerez une interprétation graphique de A.

Solution :

A représente l'aire délimité para la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0 \; et \; x = 3$.

On peut minorer A par les aires notées en rouge, et majorer A par les aires notées en vert.





$\boxed{} = ① + ② + ③ + ④$

$= \frac{0,6 \times 1}{2} u.a + 0,9 \times 1 \, u.a + \frac{1 \times 1}{2} u.a + ④$

avec $④ \geq \frac{0,9 \times 0,2}{2}$ soit $④ \geq 0,09$

$\boxed{} = ① + ② + ③$

$= \frac{1 \times 1,5}{2} u.a + 1 \times 1,2 \, u.a + 1 \times 0,1 \, u.a$

$$(0{,}3 + 0{,}9 + 0{,}5)u.a \leq A \leq (0{,}75 + 1{,}2 + 0{,}1)u.a$$
$$\mathbf{1{,}7u.a \leq A \leq 2{,}05u.a}$$

2. La fonction f est définie sur l'intervalle [0 ;3] par $f(x) = 2xe^{-0,5x^2}$.
   a. Déterminer une primitive F de f.

Solution :

f doit être ramenée à une forme du type $u'(x)e^{u(x)}$ dont une primitive est $e^{u(x)}$.

$f(x) = -xe^{-0,5x^2} \times (-2)$ on a alors $F(x) = -2e^{-0,5x^2}$

   b. En déduire la valeur exacte de $A = \int_0^3 f(x)\,dx$. *Vous mettrez en évidence la formule utilisée pour ce calcul.*

Solution :

$$A = [F(x)]_0^{\ 3} = F(3) - F(0) = -2e^{-4,5} + 2$$

Remarque : $A \approx 1{,}98$ on vérifie que l'encadrement donné en 1 est correct.

   c. Déterminez la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0 ;3]. Vous en donnerez une valeur approchée au millième.

Solution :

Soit μ la valeur moyenne de f sur [0 ;3] ; alors par définition on a :

$\mu = \frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{3}(-2e^{-4,5} + 2) = \frac{2}{3}(1 - e^{-4,5}) \approx 0{,}659$

d. En Europe, les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation considèrent qu'ils peuvent modéliser par cette fonction f l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver.
Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 3]$, $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant x, exprimé en mois.
Un journal affirme que cet hiver :

— le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million;

— le nombre moyen de lits occupés sur les trois mois a été d'environ 400 000.

Que dire de ces deux affirmations?

Solution :

_ affirmation 1 vraie : à l'aide du graphique on voit que le pic de la maladie correspond à une occupation d'environ 1,2 millions de lits.

_ affirmation 2 fausse : le nombre moyen de lits occupés sur les 3 mois correspond au nombre moyen de la fonction entre 0 et 3 et nous avons trouvé environ 0,659 millions soit environ 659 000 lits et non 400 000lits.

EXERCICE 2 : OBJECTIF 2 (ii)

1. Question de cours : soient u et v deux fonction dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soient a et b deux réels de l'intervalle I. Écrire la formule d'intégration par partie vue en cours :

Solution :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

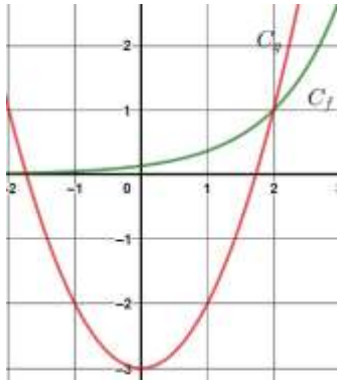
2. Grâce à une intégration par partie, calculer l'intégrale suivante : $\int_{-1}^{1}(x+3)e^{-x}\,dx$

Solution :

On pose $u(x) = x + 3$ $alors$ $u'(x) = 1$

Et $v'(x) = e^{-x}$ on peut prendre $v(x) = -e^{-x}$

$$\int_{-1}^{1}(x+3)e^{-x}\,dx = [(x+3)(-e^{-x})]^1{}_{-1} - \int_{-1}^{1} -e^{-x}\,dx = -4e^{-1} + 2e^1 - [e^{-x}]^1{}_{-1} = -\frac{4}{e} + 2e - e^{-1} + e^1 = 3e - \frac{5}{e}$$



<u>EXERCICE 3 :</u> OBJECTIF 4

Sur le graphique ci-contre, la courbe C_f est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = e^{x-2}$; et la courbe C_g est la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 3$.

En vous aidant du graphique pour connaître la position relative des deux courbes, et en vous aidant de l'expression des fonctions f et g, en déduire l'aire comprise entre C_f et C_g et les droites d'équation $x = -1 \; et \; x = 2$.

<u>Solution :</u>

Puisque la courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g sur l'intervalle [-1 ;2] ; alors l0aire entre les deux courbes sur cet intervalle correspond à :

$$\int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-1}^{2} (e^{x-2} - x^2 + 3)\,dx = \int_{-1}^{2} e^{x-2}\,dx + \int_{-1}^{2} -x^2 + 3\,dx = [e^{x-2}]^2{}_{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + 3x\right]_{-1}^{2}$$

$$= 1 - e^{-3} - \frac{8}{3} + 6 \mp 3 = \frac{22}{3} - e^{-3}\,u.a$$

<u>EXERCICE 4</u> : OBJECTIFS 2(i), 3 et 5

Soit la suite (I_n) définie par tout entier naturel par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$.

1. Calculer $\int_0^1 e^{nx}\,dx$.

<u>Solution :</u> $\int_0^1 e^{nx}\,dx = \left[\frac{e^{nx}}{n}\right]_0^1 = \frac{e^n}{n} - \frac{1}{n}$

2. On admet que $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$ sur [0 ;1]. En déduire un encadrement de I_n.

<u>Solution :</u> $\frac{e^{nx}}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$ inéaglité que l'on obtient à partir de la précédente par multiplication par e^{nx} qui est strictement positif pour tout $x \in R \; et \; tout \; n \in N$.

On a alors $\int_0^1 \frac{e^{nx}}{4}dx \leq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \leq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{2}dx \Leftrightarrow \frac{1}{4}\int_0^1 e^{nx}\,dx \leq I_n \leq \frac{1}{2}\int_0^1 e^{nx}\,dx \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n}\right) \leq I_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n}\right)}$

3. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

<u>Solution :</u>

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = 0$ par croissanc comparée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par somme et produit on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4}(\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n}) = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$