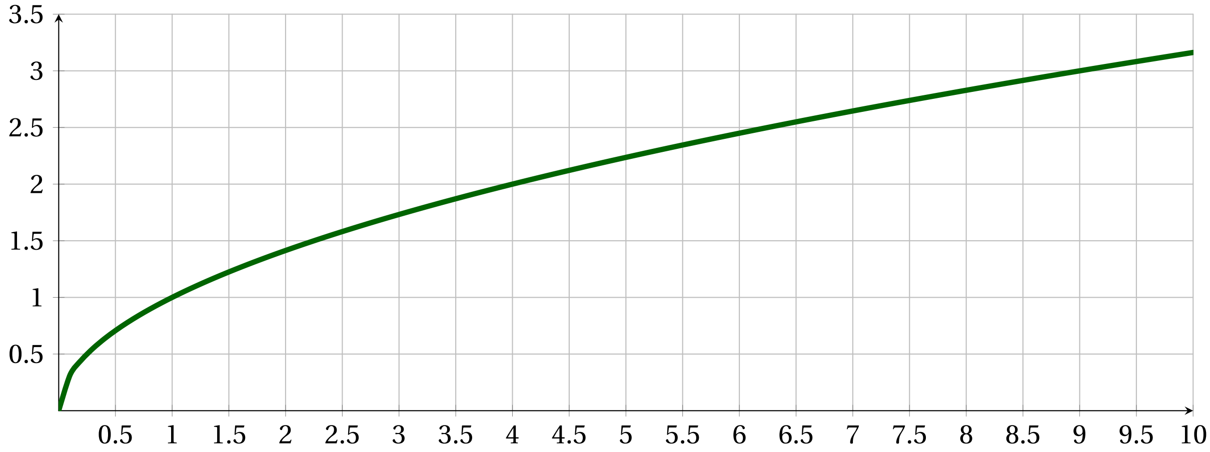
Interrogation écrite n°14

Exercice 1 **7 points**

1. Par lecture graphique donner un encadrement de $I = \int_0^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. Vous utiliserez le graphique ci-contre pour mettre en évidence l'encadrement utilisé et donnerez une interprétation graphique de I.



2. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~2]$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+5}$.
   a. Déterminer une primitive G de g.
   b. En déduire la valeur exacte de $J = \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$. Vous mettrez en évidence la formule utilisée pour ce calcul et vous écrirez la réponse sous la forme $a\ln(b)$ avec a et b des réels.
   c. Déterminez la valeur moyenne m de g sur l'intervalle $[0~;~2]$.
   Vous en donnerez la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.

Exercice 2 **3 points**

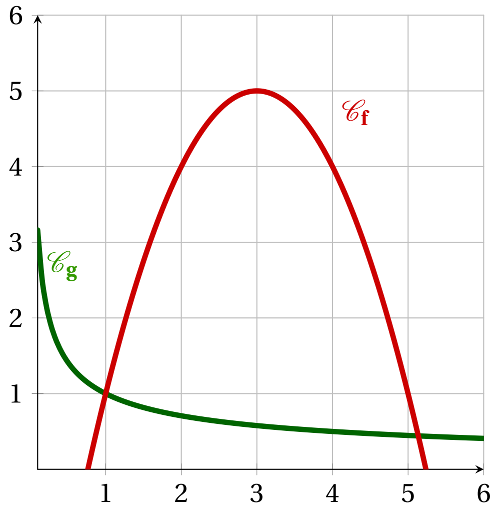
1. Question de cours : soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soient a et b deux réels de l'intervalle I. Écrire la formule d'intégration par partie vue en cours :
2. Grâce à une intégration par partie, calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{\pi} (2x-5)\sin(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 3 **5 points**

Soit la suite (I_n) définie par tout entier naturel n par $I_n = \int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$

1. Calculer $\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t$
2. Démontrer que $(1-t)^n \,\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}(1-t)^n$ sur $[0~;~1]$.
3. En déduire une majoration de I_n.
4. Grâce aux questions précédentes, déterminer la limite de la suite (I_n).

Exercice 4 **5 points**



Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ et la courbe $\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

En vous aidant du graphique pour connaître la position relative des deux courbes et en vous aidant de l'expression des fonctions f et g :

1. hachurer l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.
2. déterminer $\mathscr{A}$ par le calcul (en détaillant les étapes de calcul).

Exercice bonus **1 point**

Calculer $C = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ et exprimer le résultat sous la forme d'une seule fraction.