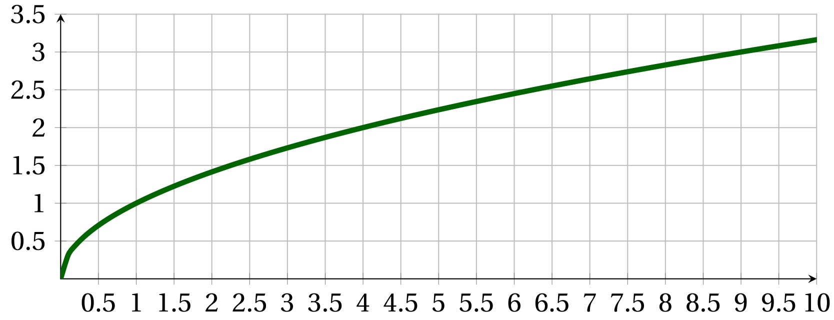
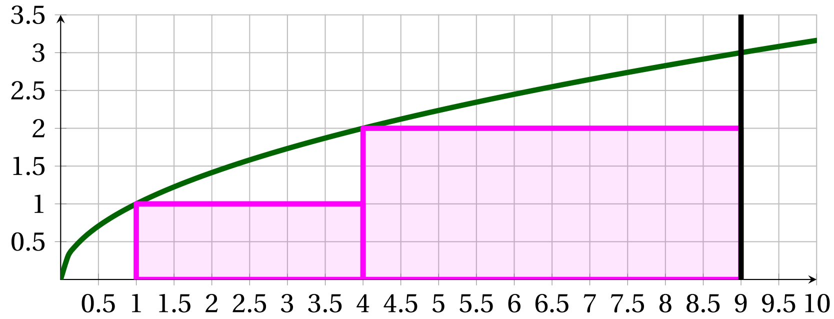
ᔓ Éléments de correction de l'interrogation n°14 ᔓ

Exercice 1 **7 points**

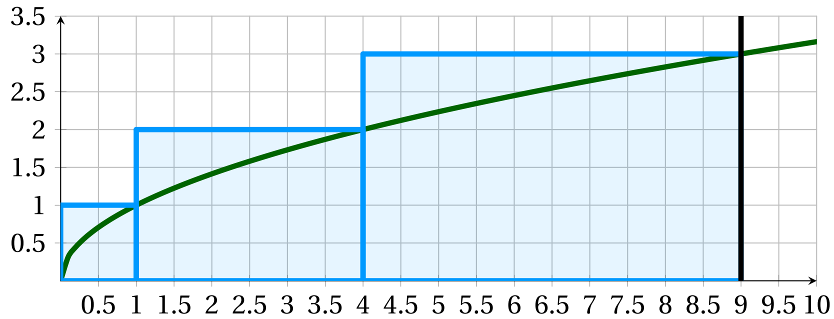
1. Par lecture graphique donner un encadrement de $I = \int_0^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. Vous utiliserez le graphique ci-contre pour mettre en évidence l'encadrement utilisé et donnerez une interprétation graphique de I.



Solution :



On minore l'aire sous la courbe par la somme des aires des 3 rectangles soit : $3 + 5 \times 2 = 13$ u.a.



On majore l'aire sous la courbe par la somme des aires des 3 rectangles soit : $1 + 6 + 15 = 22$ u.a.

Finalement : $13 \leqslant I \leqslant 22$

2. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+5}$.

a. Déterminer une primitive G de g.

Solution : La fonction g est de la forme $\dfrac{1}{3}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = \mathrm{e}^{3x} + 5$.

Donc, $G : x \to \dfrac{1}{3}\ln(u(x))$ est une primitive de g. On a donc :

$$\forall x \in [0\,;\,2] \;:\; G(x) = \frac{1}{3}\ln\left(\mathrm{e}^{3x} + 5\right)$$

b. En déduire la valeur exacte de $J = \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$. Vous mettrez en évidence la formule utilisée pour ce calcul et vous écrirez la réponse sous la forme $a\ln(b)$ avec a et b des réels.

Solution :
$J = \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_0^2 = \left[\frac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{3x}+5)\right]_0^2 = \frac{1}{3}\left(\ln(\mathrm{e}^6+5) - \ln(\mathrm{e}^0+5)\right)$
$= \frac{1}{3}\left(\ln(\mathrm{e}^6+5) - \ln(6)\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^6+5}{6}\right)$, donc $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{\mathrm{e}^6+5}{6}$.

c. Déterminez la valeur moyenne m de g sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
Vous en donnerez la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.

Solution : $m = \frac{1}{2-0}\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\times J = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^6+5}{6}\right) \approx 0,703$ au millième.

Exercice 2 **3 points**

1. Question de cours : soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soient a et b deux réels de l'intervalle I. Écrire la formule d'intégration par partie vue en cours :

Solution :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

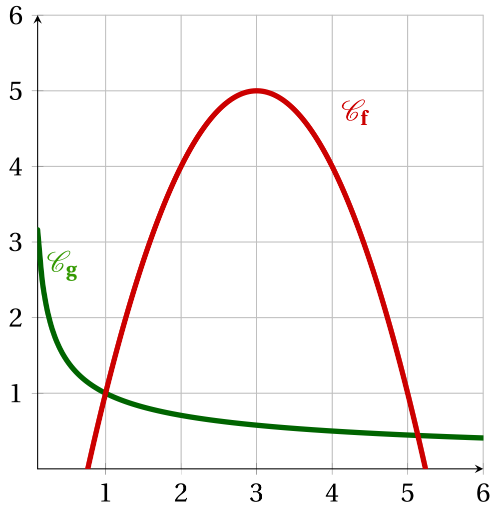
2. Grâce à une intégration par partie, calculer l'intégrale suivante : $\int_0^{\pi} (2x-5)\sin(x)\,\mathrm{d}x$

Solution : Soient u et v les fonctions définies par : $u(x) = 2x-5$ et $v'(x) = \sin(x)$. On a alors : $u'(x) = 2$ et $v(x) = -\cos(x)$.

On applique la formule d'intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (2x-5)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [-(2x-5)\cos(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -(2\pi-5)\cos(\pi) - 5\cos(0) + 2\,[\sin(x)]_0^{\pi} \\
&= 2\pi - 5 - 5 + 2(\sin(\pi) - \sin(0)) \\
&= 2\pi - 10 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

Exercice 4 **5 points**

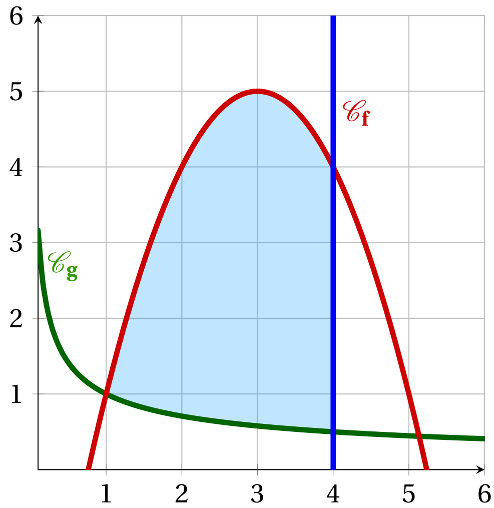


Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ et la courbe $\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

En vous aidant du graphique pour connaître la position relative des deux courbes et en vous aidant de l'expression des fonctions f et g :

1. hachurer l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

Solution :



2. déterminer $\mathscr{A}$ par le calcul (en détaillant les étapes de calcul).

Solution : On voit graphiquement que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[1\,;\,4]$, on a donc :

$$\mathscr{A} = \int_1^4 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^4 (-x^2 + 6x - 4 - \frac{1}{\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 4x - 2\sqrt{x}\right]_1^4$$

$$= \frac{-64}{3} + 48 - 16 - 4 - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 4 - 2\right) = \frac{-63}{3} + 28 + 3 = 10 \text{ u.a.}$$

Exercice 3 **5 points**

Soit la suite (I_n) définie par tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t$

Solution : $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

2. Démontrer que $(1-t)^n \,\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}(1-t)^n$ sur $[0\,;\,1]$.

Solution :
$\forall t \in [0\,;\,1] : t \leqslant 1 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^1$, par croissance de la fonction exponentielle sur $[0\,;\,1]$.
$\Longleftrightarrow (1-t)^n \,\mathrm{e}^t \leqslant (1-t)^n \,\mathrm{e}$, car $(1-t)^n \geqslant 0$ sur $[0\,;\,1]$.

3. En déduire une majoration de I_n.

Solution : $(1-t)^n \,\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}(1-t)^n \Longrightarrow \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}(1-t)^n \,\mathrm{d}t \Longrightarrow I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$

4. Grâce aux questions précédentes, déterminer la limite de la suite (I_n).

Solution : On remarque d'abord que sur $[0\,;\,1]$:

$$(1-t)^n \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{e}^t > 0 \Longrightarrow (1-t)^n \,\mathrm{e}^t \geqslant 0 \Longrightarrow \int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \geqslant 0 \Longrightarrow I_n \geqslant 0$$

Donc, avec la question **2.**, on a l'encadrement suivant : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice bonus **1 point**

Calculer $C = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x$ et exprimer le résultat sous la forme d'une seule fraction.

Solution :

$C = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 u_1(x) v'(x) \,\mathrm{d}x$, où $u_1(x) = x^2+1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Donc :

$C = [u_1(x)v(x)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 u_1'(x) v(x) \,\mathrm{d}x = \left[(x^2+1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{e^{2x}}{2} \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} - \int_0^1 xe^{2x} \,\mathrm{d}x.$

Or : $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 u_2(x) v'(x) \,\mathrm{d}x$, où $u_2(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Donc :

$\displaystyle\int_0^1 xe^{2x} \,\mathrm{d}x = [u_2(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u_2'(x) v(x) \,\mathrm{d}x = \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

Donc finalement :

$C = \mathrm{e}^2 - \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{e^2}{4} + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^2 - 2 - \mathrm{e}^2 - 1}{4} = \dfrac{3\,\mathrm{e}^2 - 3}{4}$