Entraînement pour l'interrogation n°13

EXERCICE 1 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée. On précisera I, le domaine de définition de la fonction F.

1. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, avec $F(2) = -\sqrt{2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, avec $F(1) = 0$
3. $f(x) = \dfrac{2x^3 + x}{x^4 + x^2}$, avec $F(1) = \dfrac{5}{2}\ln(2)$
4. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}$, avec $F(0) = -\dfrac{1}{16}$

5. Sur l'intervalle $]3; +\infty[$ on considère la fonction : $g: x \mapsto \frac{16}{(x-3)(x+5)}$.

a. Déterminer les réels a et b tels que : $g(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+5}$.

b. En déduire une primitive de g sur $]3; +\infty[$.

EXERCICE 2 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

1. $2y' + 3y = 0$; condition initiale : $y(2) = 1$
2. $\sqrt{3}y' + y = 1$; condition initiale : $y(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

EXERCICE 3 :

Soit l'équation (E) : $y' - 3y = 3x^2 + x + 2$.

1. Vérifier que la fonction $g: x \mapsto -x^2 - x - 1$ est une solution particulière de (E).
2. Montrer que f est solution de (E) équivalent à $f - g$ solution de (E') : $y' - 3y = 0$.
3. En déduire les solutions de (E') puis de (E).

EXERCICE Bonus :

1. Montrer que l'équation différentielle $y' = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{\sqrt{x-1}}$ admet sur $I =]1;+\infty[$ une solution de la forme $x \longmapsto (ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{x-1}$ où a, b, c et d sont des réels que l'on déterminera.
2. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation sur I.