Nom : Prénom : Classe : Term. …..	**INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES Nº9** **entraînement _ corrigé**	
Thème : Primitives, équations différentielles		***calculatrice autoriseé***

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée. On précisera I, le domaine de définition de la fonction F.

1. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; conditions initiales : $F(2) = -\sqrt{2}$

Solution : La fonction $x \mapsto 1$ admet pour primitive $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ admet pour primitive $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$.
Donc les primitives de la fonction f sur $I =]0;+\infty[$ sont les fonctions $F_k : x \mapsto x - \sqrt{x} + k$, où k est un réel.
On détermine k tel que $F(2) = -\sqrt{2} \Longleftrightarrow 2 - \sqrt{2} + k = -\sqrt{2} \Longleftrightarrow k = -2$.
Ainsi, la primitive de f sur I qui vérifie $F(2) = -\sqrt{2}$ est la fonction $F : x \mapsto x - \sqrt{x} - 2$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$; conditions initiales : $F(1) = 0$

Solution : La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet pour primitive $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ admet pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Donc les primitives de la fonction f sur $I =]0;+\infty[$ sont les fonctions $F_k : x \mapsto \ln(x) + \dfrac{1}{x} + k$, où k est un réel.
On détermine k tel que $F(1) = 0 \Longleftrightarrow \ln(1) + \dfrac{1}{1} + k = 0 \Longleftrightarrow 1 + k = 0 \Longleftrightarrow k = -1$.

Ainsi, la primitive de f sur I qui vérifie $F(1) = 0$ est la fonction $F : x \mapsto \ln(x) + \dfrac{1}{x} - 1$.

3. $f(x) = \dfrac{2x^3 + x}{x^4 + x^2}$; conditions initiales : $F(1) = \dfrac{5}{2}\ln(2)$

Solution : La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 + x}{x^4 + x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de $x \mapsto 2x^3 + x$ et de $x \mapsto x^4 + x^2$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.
Soit $u(x) = x^4 + x^2$ définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 4x^3 + 2x$.
Donc $f = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$ admet pour primitive $\dfrac{1}{2}\ln(u)$.

Les primitives de f sur $I = \mathbb{R}^*$ sont donc les fonctions $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^4 + x^2) + k$, où k est un réel.

On détermine k tel que $F(1) = \dfrac{5}{2}\ln(2) \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln(1^4 + 1^2) + k = \dfrac{5}{2}\ln(2) \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln(2) + k = \dfrac{5}{2}\ln(2) \Longleftrightarrow k = \dfrac{5}{2}\ln(2) - \dfrac{1}{2}\ln(2) k = 2\ln(2)$.

Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^4 + x^2) + 2\ln(2)$.

4. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}$; conditions initiales : $F(0) = -\dfrac{1}{16}$

Solution : La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de la composée de $x \mapsto 2x$ par la fonction exponentielle, par la composée de la fonction $x \mapsto e^{2x}+1$ par la fonction cube, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Soit $u(x) = e^{2x}+1$ définie, dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2e^{2x}$. Donc $f = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u^3}$ admet pour primitive $-\dfrac{1}{4u^2}$.
Les primitives de f sur $I = \mathbb{R}$ sont donc les fonctions $F : x \mapsto -\dfrac{1}{4\left(e^{2x}+1\right)^2} + k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(0) = -\dfrac{1}{16} \Longleftrightarrow -\dfrac{1}{4\left(e^{0}+1\right)^2} + k = -\dfrac{1}{16} \Longleftrightarrow -\dfrac{1}{16} + k = -\dfrac{1}{16} \Longleftrightarrow k = 0.$
Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = -\dfrac{1}{4\left(e^{2x}+1\right)^2}$.

5. Sur l'intervalle $]3;+\infty[$ on considère la fonction : $g : x \mapsto \frac{16}{(x-3)(x+5)}$.

a. Déterminer les réels a et b tels que : $g(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+5}$.

b. En déduire une primitive de g sur $]3;+\infty[$.

Solution :

a. $g(x) = \frac{a(x+5)+b(x-3)}{(x-3)(x+5)} = \frac{(a+b)x+5a-3b}{(x-3)(x+5)}$ par identification on a donc

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 5a-3b=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ -5b-3b=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$$

On a donc $g(x) = \frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+5}$

b. $g(x) = 2 \times \frac{1}{x-3} - 2 \times \frac{1}{x+5}$ on reconnaît pour chaque terme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ dont une primitive est $\ln(u(x))$.

$$D'où\ G(x) = 2\ln(x-3) - 2\ln(x+5) = 2\ln\left(\frac{x-3}{x+5}\right)$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

1. $2y' + 3y = 0$; condition initiale : $y(2) = 1$

Solution : $2y' + 3y = 0 \Longleftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y$, c'est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = -\frac{3}{2}$.
Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ke^{-\frac{3}{2}x}$, où K est un réel.
On détermine K tel que $y(2) = 1 \Longleftrightarrow Ke^{-\frac{3}{2}\times 2} = 1 \Longleftrightarrow Ke^{-3} = 1 \Longleftrightarrow K = e^3$.
Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = e^3 \times e^{-\frac{3}{2}x} = e^{3-\frac{3}{2}x}$.

2. $\sqrt{3}y' + y = 1$; condition initiale : $y(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

Solution :

$\sqrt{3}y' = -y + 1 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}$, il s'agit d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$ avec $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $et\ b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Les solutions sont de la forme $x \mapsto Ke^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x} - \frac{\frac{-\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$ soit $x \mapsto Ke^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x} + 1$ avec $K \in R$.

On détermine K tel que $y(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow Ke^{-1} + 1 = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow K = \frac{2\sqrt{3}-1}{e^{-1}} = (2\sqrt{3} - 1)e$

Ainsi, la solution cherchée est définie sur r par $y(x) = (2\sqrt{3} - 1)e \times e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x} + 1 = (2\sqrt{3} - 1)e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1} + 1$

Exercice 3

Soit l'équation (E) : $y' - 3y = 3x^2 + x + 2$.

1. Vérifier que la fonction $g: x \mapsto -x^2 - x - 1$ est une solution particulière de (E).

Solution :

$g'(x) = -2x - 1$ donc $g'(x) - 3g(x) = -2x - 1 - 3(-x^2 - x - 1) = -2x - 1 + 3x^2 + 3x + 3$

$$g'(x) - 3g(x) = 3x^2 + x + 2$$

On a donc bien g une solution particulière de (E).

2. Montrer que f est solution de (E) équivalent à $f - g$ solution de (E') : $y' - 3y = 0$.

Solution :

f solution de (E)$\Leftrightarrow f'(x) - 3f(x) = 3x^2 + x + 2$

$$\Leftrightarrow f'(x) - 3f(x) = g'(x) - 3g(x) \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) - 3(f(x) - g(x)) = 0$$

$\Leftrightarrow (f - g)'(x) - 3(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow f - g$ solution de (E').

3. En déduire les solutions de (E') puis de (E).

Solution :

Solution de (E') :

On a $y' = 3y$, c'est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = 3$; les solutions de cette équation sont de la forme $y(x) = Ke^{3x}$ avec $K \in R$.

Donc $\forall \in R$: $f(x) - g(x) = Ke^{3x}$ $soit$ $f(x) = Ke^{3x} + g(x) = Ke^{3x} - x^2 - x - 1$

Les solutions de (E) sont finalement les fonctions $f: x \mapsto Ke^{3x} - x^2 - x - 1; K \in R$.

Exercice bonus

1. Montrer que l'équation différentielle $y' = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{\sqrt{x-1}}$ admet sur $I =]1;+\infty[$ une solution de la forme $x \mapsto (ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{x-1}$ où a, b, c et d sont des réels que l'on déterminera.

> **Solution :** Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \left(ax^3+bx^2+cx+d\right)\sqrt{x-1}$. Alors f est dérivable sur I comme produit et composée de fonctions de références, et on a, pour tout $x \in I$, $f'(x) = (3ax^2+2bx+c)\sqrt{x-1} + (ax^3+bx^2+cx+d) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{7ax^3+(5b-6a)x^2+(3c-4b)x+d-2c}{2\sqrt{x-1}}$. Ainsi f est solution de (E) si, et seulement si, $f'(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x^3+2x^2+2x+2}{2\sqrt{x-1}}$. D'où $\begin{cases} 7a = 2 \\ 5b-6a = 2 \\ 3c-4b = 2 \\ d-2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{26}{35} \\ c = \frac{58}{35} \\ d = \frac{186}{35} \end{cases}$. Donc la fonction f définie sur I par $f(x) = \left(\frac{2}{7}x^3 + \frac{26}{35}x^2 + \frac{58}{35}x + \frac{186}{35}\right)\sqrt{x-1}$ est solution de l'équation (E).

2. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation sur I.

> **Solution :** Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto f(x) + k$, où k est un réel.