∽ Interrogation écrite n°13 ∾

Exercice 1 **11,5 points**

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée. On précisera I, le domaine de définition de la fonction F.

a. $f(x) = 4x^2 + \dfrac{5}{\sqrt{x}} - 1$, avec $F(1) = 3$

b. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{3}{x}$, avec $F(\mathrm{e}) = -\dfrac{1}{2\,\mathrm{e}^2}$

c. $f(x) = \dfrac{30x^2 + 2}{(5x^3 + x)^2}$, avec $F(1) = 0$

d. $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{3x}}{2\,\mathrm{e}^{3x-15} - 1}$, avec $F(5) = 2$

2. Sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\ ;\ 4\right[$, on considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \frac{7}{(2x-1)(4-x)}$$

a. Déterminer les réels a et b tels que : $f(x) = \dfrac{a}{2x-1} + \dfrac{b}{4-x}$.

b. En déduire une primitive de f sur $\left]\dfrac{1}{2}\ ;\ 4\right[$.

Exercice 2 **4 points**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

1. $5y' - 2y = 0$; condition initiale : $y(5) = 2$
2. $y' + y = 2$; condition initiale : $y(0) = 5$

Exercice 3 **4,5 points**

Soit l'équation $(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$

1. Vérifier que la fonction $g : x \rightarrow x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).
2. Montrer que f est solution de (E) équivaut à $f - g$ est solution de $(E') : y' + y = 0$.
3. En déduire les solutions de (E') puis celles de (E).

Exercice bonus

Après avoir déterminé une fonction f de la forme : $f(x) = (ax^2 + bx)\,\mathrm{e}^{-2x}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$, déterminer la solution F de (E) qui s'annule en 1.