☙ Éléments de correction de l'interrogation n°13 ☙

Exercice 1 **11,5 points**

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée. On précisera I, le domaine de définition de la fonction F.

a. $f(x) = 4x^2 + \dfrac{5}{\sqrt{x}} - 1$, avec $F(1) = 3$

Solution : On a :

- la fonction $x \mapsto 4x^2$ admet pour primitive $x \mapsto \dfrac{4x^3}{3}$ sur $\mathbb{R}$
- la fonction $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ admet pour primitive $x \mapsto 10\sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$.
- la fonction $x \mapsto -1$ admet pour primitive $x \mapsto -x$ sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de la fonction f sur $I = [0;+\infty[$ sont les fonctions $F_k : x \mapsto \dfrac{4x^3}{3} + 10\sqrt{x} - x + k$, où k est un réel.

On détermine k tel que $F_k(1) = 3 \Longleftrightarrow \dfrac{4}{3} + 10 - 1 + k \Longleftrightarrow \dfrac{31}{3} + k = 3 \Longleftrightarrow k = 3 - \dfrac{31}{3} \Longleftrightarrow k = -\dfrac{22}{3}$.

Ainsi, la primitive de f sur I qui vérifie $F(1) = 3$ est la fonction $F : x \mapsto \dfrac{4x^3}{3} + 10\sqrt{x} - x - \dfrac{22}{3}$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{3}{x}$, avec $F(\mathrm{e}) = -\dfrac{1}{2\,\mathrm{e}^2}$

Solution : On a :

- la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ admet pour primitive $x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
- la fonction $x \mapsto -\dfrac{3}{x}$ admet pour primitive $x \mapsto -3\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Donc les primitives de la fonction f sur $I =]0;+\infty[$ sont les fonctions $F_k : x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2} - 3\ln(x) + k$, où k est un réel.

On détermine k tel que $F_k(\mathrm{e}) = -\dfrac{1}{2\,\mathrm{e}^2} \Longleftrightarrow -\dfrac{1}{2e^2} - 3\ln(e) + k = -\dfrac{1}{2\,\mathrm{e}^2} \Longleftrightarrow -3 \times 1 + k = 0 \Longleftrightarrow k = 3$.

Ainsi, la primitive de f sur I qui vérifie $F(1) = 0$ est la fonction $F : x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2} - 3\ln(x) + 3$.

c. $f(x) = \dfrac{30x^2 + 2}{(5x^3 + x)^2}$, avec $F(1) = 0$

Solution : Soit la fonction polynomiale $u : x \to 5x^3 + x$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 15x + 1$, donc $f = \dfrac{2u'}{u^2}$ admet pour primitive $-\dfrac{2}{u}$.

Or : $u(x) = 0 \Longleftrightarrow 5x^3 + x = 0 \Longleftrightarrow x(5x^2 + 1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, car $5x^2 + 1 > 0$.

Les primitives de f sur $I = \mathbb{R}^*$ sont donc les fonctions $F_k : x \mapsto -\dfrac{2}{5x^3 + x} + k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(1) = 0 \Longleftrightarrow -\dfrac{2}{5+1} + k = 0 \Longleftrightarrow -\dfrac{1}{3} + k = 0 \Longleftrightarrow k = \dfrac{1}{3}$.

Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = -\dfrac{2}{5x^3 + x} + \dfrac{1}{3}$.

d. $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{3x}}{2\,\mathrm{e}^{3x-15}-1}$, avec $F(5) = 2$

Solution :
La fonction $u : x \rightarrow 2\,\mathrm{e}^{3x-15} - 1$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$, car constituée d'une fonction exponentielle composée avec une fonction polynomiale.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 6\,\mathrm{e}^{3x-15}$, donc $f = \dfrac{\mathrm{e}^{15}}{3}\dfrac{u'}{u}$ admet pour primitive $\dfrac{\mathrm{e}^{15}}{3}\ln(u)$.

Or : $u(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow 2\,\mathrm{e}^{3x-15} - 1 \leqslant 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{3x-15} \leqslant \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow 3x - 15 \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$u(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow 3x \leqslant 15 - \ln(2) \Longleftrightarrow x \leqslant 5 - \dfrac{\ln(2)}{3}$

Les primitives de f sur $I = \left]5 - \dfrac{\ln(2)}{3}\,;\,+\infty\right[$ sont donc les fonctions $F : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{15}}{3}\ln(2\,\mathrm{e}^{3x-15} - 1) + k$, où k est un réel.

On détermine k tel que $F(5) = 2 \Longleftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{15}}{3}\ln(2\,\mathrm{e}^{3\times5-15} - 1) + k = 2 \Longleftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{15}}{3}\ln(2\,\mathrm{e}^{0} - 1) + k = 2.$

$$\Longleftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{15}}{3}\ln(1) + k = 2 \Longleftrightarrow k = 2$$

Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{15}}{3}\ln(2\,\mathrm{e}^{3x-15} - 1) + 2$.

2. Sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,4\right[$, on considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \frac{7}{(2x-1)(4-x)}$$

a. Déterminer les réels a et b tels que : $f(x) = \dfrac{a}{2x-1} + \dfrac{b}{4-x}$.

Solution : $\dfrac{a}{2x-1} + \dfrac{b}{4-x} = \dfrac{a(4-x)}{(2x-1)(4-x)} + \dfrac{b(2x-1)}{(2x-1)(4-x)} = \dfrac{4a - ax + 2bx - b}{(2x-1)(4-x)} = \dfrac{(4a-b) + (2b-a)x}{(2x-1)(4-x)}$

Donc, par identification :

$(4a-b) + (2b-a)x = 7 \Longleftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 7 \\ 2b - a = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 8b - b = 7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

Donc : $f(x) = \dfrac{7}{(2x-1)(4-x)} = \dfrac{2}{2x-1} + \dfrac{1}{4-x}$

b. En déduire une primitive de f sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,4\right[$.

Solution : Sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,4\right[$:

- la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{2x-1}$ admet pour primitive $x \mapsto \ln(2x-1)$ (car $2x - 1 > 0$ sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,4\right[$)
- la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4-x}$ admet pour primitive $x \mapsto -\ln(4-x)$ (car $4 - x > 0$ sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,4\right[$)

Donc, une primitive de f sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,4\right[$ est : $F : x \rightarrow \ln(2x-1) - \ln(4-x)$.

Exercice 2 **4 points**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

1. $5y' - 2y = 0$; condition initiale : $y(5) = 2$

> **Solution :** $5y' - 2y = 0 \Longleftrightarrow y' = \dfrac{2}{5}y$, c'est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = \dfrac{2}{5}$.
> Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto K\mathrm{e}^{\frac{2}{5}x}$, où K est un réel.
> On détermine K tel que $y(5) = 2 \Longleftrightarrow K\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\times 5} = 2 \Longleftrightarrow K\mathrm{e}^{2} = 2 \Longleftrightarrow K = 2\mathrm{e}^{-2}$.
> Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = 2\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{\frac{2}{5}x} = 2\mathrm{e}^{\frac{2}{5}x-2}$.

2. $y' + y = 2$; condition initiale : $y(0) = 5$

> **Solution :** $y' + y = 2 \Longleftrightarrow y' = -y + 2$, c'est une équation différentielle du type $y' = ay + b$ avec $a = -1$ et $b = 2$. Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto K\mathrm{e}^{-x} + 2$, où K est un réel.
> On détermine K tel que $y(0) = 5 \Longleftrightarrow K\mathrm{e}^{0} + 2 = 5 \Longleftrightarrow K = 3$.
> Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = 3\mathrm{e}^{-x} + 2$.

Exercice 3 **4,5 points**

Soit l'équation (E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$

1. Vérifier que la fonction $g : x \rightarrow x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

> **Solution :** $\forall x \in \mathbb{R} : g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$.
> Donc : $g'(x) + g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$, donc g est bien une solution de (E).

2. Montrer que f est solution de (E) équivaut à $f - g$ est solution de (E') : $y' + y = 0$.

> **Solution :**
> f est solution de $(E) \Longleftrightarrow f' + f = \mathrm{e}^{-x}$
> $\Longleftrightarrow (f-g)' + (f-g) = f' - g' + f - g = (f'+f) - (g'+g) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = 0$
> $\Longleftrightarrow f - g$ est solution de (E') : $y' + y = 0$.

3. En déduire les solutions de (E') puis celles de (E).

> **Solution :** $y' + y = 0 \Longleftrightarrow y' = -y$: c'est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = -1$.
> Les solutions de (E') sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto K\mathrm{e}^{-x}$, où K est un réel.
> Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = K\mathrm{e}^{-x} \Longleftrightarrow f(x) = K\mathrm{e}^{-x} + g(x) \Longleftrightarrow f(x) = K\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$
> Les solutions de (E) sont finalement les fonctions $f : x \rightarrow K\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$.

Exercice bonus

Après avoir déterminé une fonction f de la forme : $f(x) = (ax^2 + bx)\,\mathrm{e}^{-2x}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$, déterminer la solution F de (E) qui s'annule en 1.

Solution : La fonction f est le produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle composée avec une fonction polynomiale. Elle est donc parfaitement définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (2ax+b)\,\mathrm{e}^{-2x} + (ax^2+bx) \times (-2\,\mathrm{e}^{-2x}) = \left(2ax + b - 2ax^2 - 2bx\right)\,\mathrm{e}^{-2x}$

$= \left(-2ax^2 + 2(a-b)x + b\right)\,\mathrm{e}^{-2x}$

On a donc : $f'(x) + 2f(x) = \left(-2ax^2 + 2(a-b)x + b\right)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2(ax^2+bx)\,\mathrm{e}^{-2x}$

$= \left((2a-2a)x^2 + (2a-2b+2b)x + b\right)\,\mathrm{e}^{-2x}$

$= (2ax+b)\,\mathrm{e}^{-2x}$

Si on veut que f soit solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$, on trouve a et b par identification :

$$(2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x} = 2ax + b \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2a & = & 2 \\ b & = & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & 1 \end{array}\right.$$

Donc : $f : x \to (2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$

y solution de (E) équivaut à $y - f$ solution de (E') : $y' + 2y = 0$ (cf. démonstration ex.3)

$y' + 2y = 0 \Longleftrightarrow y' = -2y$: c'est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = -2$.

Les solutions de (E') sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \to K\,\mathrm{e}^{-2x}$ où $K \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ y(x) - f(x) = K\,\mathrm{e}^{-2x} \Longleftrightarrow y(x) = K\,\mathrm{e}^{-2x} + f(x) \Longleftrightarrow y(x) = K\,\mathrm{e}^{-2x} + (x^2+x)\,\mathrm{e}^{-2x}$$

On veut la solution F de (E) qui s'annule en 1 soit :

$F(1) = 0 \Longleftrightarrow K\,\mathrm{e}^{-2} + 2\,\mathrm{e}^{-2} = 0 \Longleftrightarrow (K+2)\,\mathrm{e}^{-2} = 0 \Longleftrightarrow K + 2 = 0$ car $\mathrm{e}^{-2} \neq 0$ soit $K = -2$.

On a donc $F(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x} + (x^2+x)\,\mathrm{e}^{-2x} = (x^2+x-2)\,\mathrm{e}^{-2x}$