Éléments de correction de l'entraînement n°2 pour l'interrogation écrite nº12

Exercice 1

Un test de dépistage d'une maladie est mis en vente. Le mode d'emploi précise que :

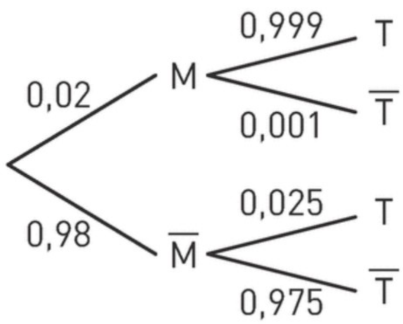
- Pour une personne n'étant pas malade, le test est néanmoins positif (c'est-à-dire désigne cette personne comme malade) dans 2,5% des cas ;
- Pour une personne malade, le test est néanmoins négatif (c'est-à-dire désigne cette personne comme non malade) dans 0,1% des cas.

On suppose qu'une maladie touche 2% de la population d'un pays et qu'on décide de faire passer ce test à tous les habitants. On considère, pour un habitant donne, les événements :

- M : « cet habitant est malade »
- T : « Le test est positif »

1. Traduire l'expérience par un arbre pondéré.

Solution :



2. **a.** Calculer la probabilité que l'habitant soit malade et que son test soit positif.

Solution : $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=0{,}02\times 0{,}999=0{,}01998$

b. Montrer que $P(T)=\dfrac{139}{3125}$.

Solution : M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la loi des probabilités totales :
$P(T)=P(M\cap T)+P(\overline{M}\cap T)=0{,}01998+P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(T)=0{,}02\times 0{,}999+0{,}98\times 0{,}025=0{,}0445=\dfrac{139}{3125}$

c. Le test de l'habitant est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ? Que peut-on alors en déduire quant à l'efficacité de ce test ?

Solution : Il s'agit en fait de calculer $P_T(M)$: $P_T(M)=\dfrac{P(M\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0{,}01998}{0{,}0445}\approx 0{,}45$

3. On choisit au hasard n habitants, en assimilant ce tirage à un choix avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant un test positif ; on admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p=\dfrac{139}{3125}$. Combien faudra-t-il choisir de personnes afin que la probabilité qu'il y en ait au moins une qui ait un test positif soit supérieur à 0,999 ?

Solution : Il s'agit de trouver n de sorte que $P(X\geq 1)>0{,}999$.
Soit $1-P(X=0)>0{,}999\Leftrightarrow 1-\left(\dfrac{2986}{3125}\right)^n>0{,}999\Leftrightarrow -\left(\dfrac{2986}{3125}\right)^n>-0{,}001\Leftrightarrow \left(\dfrac{2986}{3125}\right)^n<0{,}001\Leftrightarrow n\ln\left(\dfrac{2986}{3125}\right)<\ln 0{,}001$
, par croissance de la fonction ln sur$]0\,;+\infty[$.

Soit finalement : $n > \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln\left(\dfrac{2986}{3125}\right)}$. On a $\dfrac{\ln 0{,}001}{\ln\left(\dfrac{2986}{3125}\right)} \approx 151{,}8$, puisque $n \in N$ alors $n \geq 152$.

Il faudrait donc choisir au moins 152 personnes afin que la probabilité qu'il y en ait au moins une qui ait un test positif soit supérieur à 0,999.

Exercice 2

On considère une urne opaque qui contient des boules bleues, des boules rouges et des boules vertes, toutes indiscernables au toucher. Parmi les expériences aléatoires ci-dessous donner celles qui correspondent à une épreuve de Bernoulli (en justifiant).

1. On tire une boule et on regarde sa couleur.
2. On tire une boule et on regarde si elle est bleue.
3. On prélève deux boules de l'urne sans remise et on regarde si elles sont de la même couleur.
4. On tire une boule de l'urne et on regarde si elle n'est pas rouge.

Solution :

1. Cette expérience n'est pas une épreuve de Bernoulli, puisqu'il y a plus de deux issues possibles (« Bleu », « Rouge », « Verte »)

2. Cette expérience est une épreuve de Bernoulli, puisqu'il n'y a que deux issues possibles qui sont « oui » (la boule tirée est bleue) et « non » (la boule tirée n'est pas bleue).

3. Cette expérience est une épreuve de Bernoulli, puisqu'il n'y a que deux issues possibles qui sont « oui » (les deux boules tirées sont de la même couleur) et « non » (les deux boules tirées ne sont pas de la même couleur).

4. Cette expérience est une épreuve de Bernoulli, puisqu'il n'y a que deux issues possibles qui sont « oui » (la boule tirée n'est pas rouge) et « non » (la boule tirée est rouge).

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}2$.

1. Écrire la formule avec les coefficients binomiaux puis donner la valeur exacte grâce à la calculatrice des probabilités suivantes :

   a) $P(X=4)$ b) $P(X \leq 1)$

Solution :

a) $P(X=4)=\binom{5}{4}0{,}2^4 \times 0{,}8^1=0{,}0064$

b) $P(X \leq 1)=\binom{5}{0}0{,}2^0 \times 0{,}8^5+\binom{5}{1}0{,}2^1 \times 0{,}8^4=0{,}73728$

2. Calculer, en détaillant, l'espérance et la variance de X.

Solution :

$E(X)=np=5\times 0{,}2=1$ et $V(X)=np(1-p)=5\times 0{,}2\times 0{,}8=0{,}8$

Exercice 4

Dans une classe de 35 élèves, chaque élève arrive en retard, indépendamment les uns des autres, avec une probabilité égale à 0,04. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'élèves en retard lors du prochain cours (où il n'y aura pas d'absent). Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser les paramètres.

Solution :

- Pour chaque élève de la classe, le fait qu'il arrive en retard où non est une épreuve de Bernoulli de paramètre *p=0,04* d'après l'énoncé.

- Comme on considère le prochain cours où il n'y aura pas d'absent, on répète 35 fois la même épreuve de Bernoulli.
- De plus, on nous dit que les élèves arrivent en retard (ou pas) indépendamment les uns des autres. Donc les 35 épreuves de Bernoulli sont répétées de façon indépendante.

X suit donc une loi binomiale de paramètres *n=35* et *p=0,04*.

Exercice 5

On considère une variable aléatoire *Y* qui suit la loi binomiale de paramètres *n=34* et *p=0,42*. Après avoir transformé de façon à n'avoir que des probabilités calculables avec la calculatrice, calculer les probabilités suivantes. On arrondira les résultats au millième.

1. $P(15<Y\leq 30)$
2. $P(10\leq Y<20)$
3. $P(Y>13)$
4. $P(Y\geq 18)$

Solution :

1. $P(15<Y\leq 30)=P(Y\leq 30)-P(Y\leq 15)\approx 0{,}333$
2. $P(10\leq Y<20)=P(Y\leq 19)-P(Y\leq 9)\approx 0{,}918$
3. $P(Y>13)=1-P(Y\leq 13)\approx 0{,}603$
4. $P(Y\geq 18)=1-P(Y\leq 17)\approx 0{,}132$

Exercice 6

Soit *Z* une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres *n=25* et *p=0,7*. Grâce à la calculatrice, déterminer le plus petit entier *a* tel que $P(Z\leq a)\geq 0{,}95$.

Solution :

Grâce à la calculatrice, on trouve que $P(Z\leq 20)\approx 0{,}9095<0{,}95$ et que : $P(Z\leq 21)\approx 0{,}9668>0{,}95$

On peut donc dire que $a=21$.

Exercice 7

X suit la loi binomiale de paramètres *n=72* et *p=0,52*. Pour chacun des intervalles suivants, déterminer s'il est un intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 pour *X* en justifiant.

1. [25;44]
2. [32;68]
3. [30;46]

Solution :

1. $P(X\in[25;44])=P(25\leq X\leq 44)=P(X\leq 44)-P(X\leq 24)\approx 0{,}9516>0{,}95$ donc [25 ; 44] est un intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 pour *X*.
2. $P(X\in[32;68])=P(32\leq X\leq 68)=P(X\leq 68)-P(X\leq 31)\approx 0{,}9194<0{,}95$ donc [32 ; 68] n'est pas un intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 pour *X*.
3. $P(X\in[30;46])=P(30\leq X\leq 46)=P(X\leq 46)-P(X\leq 29)\approx 0{,}9538>0{,}95$ donc [30 ; 46] est un intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 pour *X*.

Exercice bonus

X suit la loi binomiale de paramètres *n=28* et *p=0,25*. Déterminer un intervalle de fluctuation <u>centré</u> au seuil de 0,90 associé à *X*. On veillera à ce que l'intervalle soit le plus petit possible.

Solution :

$\frac{(1-0{,}90)}{2}=0{,}05$ et $0{,}90+\frac{(1-0{,}90)}{2}=0{,}95$. Grâce à la calculatrice, on trouve que :

- $P(X\leq 2)\approx 0{,}01666<0{,}05$ et $P(X\leq 3)\approx 0{,}0551>0{,}05$
- de même : $P(X\leq 10)\approx 0{,}9321<0{,}95$ et $P(X\leq 11)\approx 0{,}9706>0{,}95$

Donc l'intervalle [3 ; 10] est un intervalle de fluctuation <u>centré</u> au seuil de 0,90 associé à *X*