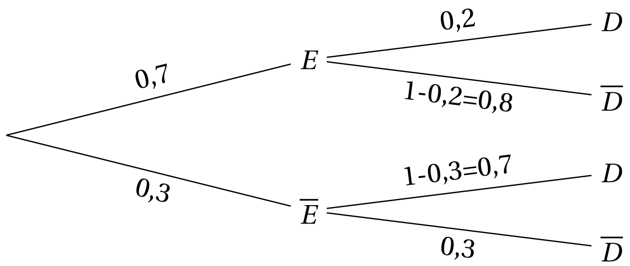
Éléments de correction de l'interrogation n°12

Exercice 1 **6 points**

La production d'une entreprise de matériel mathématique est composée à 70 % d'équerres et à 30 % de rapporteurs.
Suite à un problème en usine, 20 % des équerres ont des défauts et 30 % des rapporteurs n'en ont pas.
On choisit au hasard un matériel de l'usine.
On notera E l'événement "prendre une équerre", et D l'événement "le matériel choisi est défectueux".

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Solution :



2. Quelle est la probabilité de prendre une équerre sans défaut?

Solution : $P(\overline{D} \cap E) = P(E) \times P_E(\overline{D}) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$
La probabilité de prendre une équerre sans défaut est 0,56.

3. Montrer que $P(\overline{D}) = 0,65$: interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

Solution : D'après la formule des probabilités totales :
$P(\overline{D}) = P(\overline{D} \cap E) + P(\overline{D} \cap \overline{E}) = 0,56 + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(D) = 0,56 + 0,3 \times 0,3 = 0,56 + 0,09 = 0,65.$

4. Le matériel n'a pas de défaut, quelle est la probabilité que ce soit une équerre?

Solution : On veut calculer $P_{\overline{D}}(E)$.

Comme $P(\overline{D} \cap E) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(E)$, on a : $P_{\overline{D}}(E) = \dfrac{P(\overline{D} \cap E)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,56}{0,65} \approx 0,8615$

Sachant que le matériel n'a pas de défaut, la probabilité que ce soit une équerre est 0,8615.

5. On choisit au hasard n matériels (équerres, rapporteurs confondus), en assimilant ce tirage à un choix avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de matériels n'ayant pas de défaut; on admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,65$. Combien faudra-t-il choisir de matériels afin que la probabilité qu'il y en ait au moins un qui ait un défaut soit supérieur à 0,99?

Solution : On veut trouver n tel que $P(X \leqslant n-1) > 0,99$:
$P(X \leqslant n-1) > 0,99 \Longleftrightarrow 1 - P(X = n) > 0,99 \Longleftrightarrow 1 - \binom{n}{n} \times 0,65^n \times 0,23^0 > 0,99 \Longleftrightarrow 1 - 0,65^n > 0,99$
$P(X \leqslant n-1) > 0,99 \Longleftrightarrow 0,65^n < 0,01 \Longleftrightarrow n \ln(0,65) < \ln(0,01)$, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$
$P(X \leqslant n-1) > 0,99 \Longleftrightarrow n > \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,65)}$, car $\ln(0,65) < 0$
$P(X \leqslant n-1) > 0,99 \Longleftrightarrow n > 10,69$: il faut choisir au moins 11 matériels afin que la probabilité qu'il y en ait au moins un qui ait un défaut soit supérieur à 0,99

Solution : (Avec la coquille de l'énoncé)
On veut trouver n tel que $P(X \leqslant n-1) > 0,99$:
$P(X \leqslant n-1) > 0,99 \Longleftrightarrow 1 - P(X = n) > 0,99 \Longleftrightarrow 1 - \binom{n}{n} \times 0,77^n \times 0,23^0 > 0,99 \Longleftrightarrow 1 - 0,77^n > 0,99$
$P(X \leqslant n-1) > 0,99 \Longleftrightarrow 0,77^n < 0,01 \Longleftrightarrow n\ln(0,77) < \ln(0,01)$, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$
$P(X \leqslant n-1) > 0,99 \Longleftrightarrow n > \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,77)}$, car $\ln(0,77) < 0$
$P(X \leqslant n-1) > 0,99 \Longleftrightarrow n > 17,61$: il faut choisir au moins 18 matériels afin que la probabilité qu'il y en ait au moins un qui ait un défaut soit supérieur à 0,99

Exercice 2 **3 points**

1. Dans un groupe de spécialité mathématiques de 19 élèves, on s'intéresse à la 2e spécialité des élèves. Parmi les expériences aléatoires ci-dessous donner celles qui correspondent à une épreuve de Bernoulli (en justifiant).
   a. on choisit un élève au hasard et on lui demande quelle est sa 2^e spécialité.

Solution : Cette expérience n'est pas une épreuve de Bernoulli, puisqu'il y a plus de deux issues possibles ("Physique-Chimie", "SES", "HGGSP", "NSI" etc...)

   b. on choisit un élève au hasard et on lui demande s'il suit également la spécialité physique-chimie.

Solution : Cette expérience est une épreuve de Bernoulli, puisqu'il n'y a que deux issues possibles qui sont "oui" (l'élève suit la spécialité physique-chimie) et "non" (l'élève ne suit pas la spécialité physique-chimie).

   c. on choisit 2 élèves au hasard et on leur demande si l'un suit la spécialité SES et l'autre la spécialité NSI.

Solution : Cette expérience est une épreuve de Bernoulli, puisqu'il n'y a que deux issues possibles qui sont "oui" (l'un des deux élèves suit la spécialité SES et l'autre la spécialité NSI) et "non" (aucun des deux ne suit la spécialité SES et aucun des deux ne suit la spécialité NSI).

2. On prélève 5 pièces, avec remise, dans un lot de 100 000 pièces contenant 1000 défectueuses. La qualité de chaque pièce est supposée indépendante de celles des autres. La variable aléatoire X compte le nombre de pièces défectueuses tirées. Quelle est la loi de probabilité de X? Préciser les paramètres.

Solution : Le fait de choisir une pièce et de regarder si elle est défectueuse ou non est une épreuve de Bernoulli où on considère que le succès est de tomber sur une pièce défectueuse. Le paramètre de cette épreuve de Bernoulli est donc $p = \dfrac{1000}{100000} = 0,01$.
Si on tire 5 pièces à la suite, avec remise, qualité de chaque pièce est supposée indépendante de celles des autres, on répète de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli précédente. De plus, x compte le nombre de succès.
X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,01$.

Exercice 3 **5 points**

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,4$. On arrondira les résultats à 10^{-4} près.

1. Écrire la formule avec les coefficients binomiaux puis donner la valeur arrondie grâce à la calculatrice des probabilités suivantes :

 a. $P(Y = 3)$

Solution : $P(Y=3) = \binom{8}{3} \times 0,4^3 \times (1-0,4)^5 = 56 \times 0,4^3 \times 0,6^5 \approx 0,2787$

 b. $P(Y \geqslant 7)$

Solution :

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 7) = P(Y=7) + P(Y=8) &= \binom{8}{7} \times 0,4^7 \times (1-0,4)^1 + \binom{8}{8} \times 0,4^8 \times (1-0,4)^0 \\ &= 8 \times 0,4^7 \times 0,6 + 1 \times 0,4^8 \times 0,6^0 \approx 0,0085 \end{aligned}$$

2. Après avoir exprimé les probabilités ci-dessous avec des probabilités du type $P(Y \leqslant a)$, calculer les probabilités suivantes.

 a. $P(2 \leqslant Y < 7)$

Solution : $P(2 \leqslant Y < 7) = P(Y < 7) - P(Y \leqslant 1) = P(Y \leqslant 6) - P(Y \leqslant 1) \approx 0,8851$

 b. $P(Y > 4)$

Solution : $P(Y > 4) = 1 - P(Y \leqslant 4) \approx 0,1736$

3. Calculer, en détaillant, l'espérance et l'écart-type de Y.

Solution : $E(X) = n \times p = 8 \times 0,4 = 3,2$ et $\sigma(Y) = \sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{8 \times 0,4 \times 0,6} = \sqrt{1,92} \approx 1,3856$

Exercice 4 **2 points**

Z suit la loi binomiale de paramètres $n = 42$ et $p = 0,55$. Répondre aux questions suivantes en justifiant. On arrondira les résultats à 10^{-4} près.

1. L'intervalle $[16 ; 28]$ est-il un intervalle de fluctuation au seuil de 0,90 pour Z ?

Solution : $P(16 \leqslant Z \leqslant 28) = P(Z \leqslant 28) - P(Z \leqslant 15) \approx 0,9453 > 0,90$, donc $[16 ; 28]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 0,90 pour Z

2. Déterminer le plus grand entier a tel que $P(Z \leqslant a) < 0,01$.

Solution : Grâce à la calculatrice, on trouve que : $P(Z \leqslant 15) \approx 0,0093 < 0,01$ et $P(Z \leqslant 16) \approx 0,0205 > 0,01$. Donc $a = 15$.

Exercice bonus **1 point**

T suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,6$. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à T. On veillera à ce que l'intervalle soit le plus petit possible.

Solution : On cherche a le plus grand possible tel que $P(T < a) < 0,025$. On trouve avec la calculatrice que $a = 8$, car $P(T \leqslant 7) \approx 0,021 < 0,025$ et $P(T \leqslant 8) \approx 0,0565 > 0,025$.
De même, on cherche b le plus petit possible tel que $P(Y > b) < 0,025$, soit tel que $P(Y \leqslant b) > 0,975$. On trouve avec la calculatrice que $b = 16$, car $P(T \leqslant 16) \approx 0,984 > 0,975$ et $P(T \leqslant 15) \approx 0,949 < 0,975$.
On vérifie que $[8 ; 16]$ est bien un intervalle de fluctuation au seuil de 90% :
$P(8 \leqslant T \leqslant 16) = P(T \leqslant 16) - P(T \leqslant 7) \approx 0,9630 > 0,95$.