Nom : Prénom : Classe : Term ….	**INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES N°7** **ENTRAÎNEMENT _ CORRIGÉ**	
Thème : produit scalaire_ espace		***calculatrice autoriseé_ ?min***

OBJECTIFS ÉVALUÉS	
1	Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace
2	Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.
3	Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume.
4	Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point. Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan
5	Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur
6	Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points.

EXERCICE 1 : (OBJECTIF 4 : ……points)

Soit le plan (P) dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(5;0;1)$. Déterminer une équation cartésienne de ce plan (P).

Solution :

Une équation cartésienne de (P) est du type : $1x-2y+3z+d=0$.

Puisque A appartient à (P), ses coordonnées vérifient l'équation de (P) :

$$1\times5-2\times0+3\times1+d=0\Leftrightarrow d=-8$$

On a alors :

(P) : $\mathbf{1x-2y+3z-8=0}$

EXERCICE 2 : (OBJECTIFS 2 et 5 : ……points)

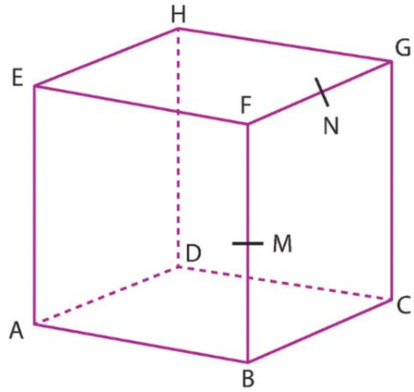
1. Déterminer la distance entre I(7 ; -2 ; 6) et le plan P d'équation cartésienne $-x+y+3z+2=0$

> **Solution :**
>
> Un vecteur normal au plan P est : $\vec{n}(-1;1;3)$. La droite orthogonal à P et passant par le point I a donc pour équation paramétrique : $\begin{cases} x=-t+7 \\ y=t-2 \\ z=3t+6 \end{cases}$, t dans $\mathbb{R}$
>
> Le projeté orthogonal de I sur le plan correspond à l'intersection entre la droite et le plan. Pour calculer ses coordonnées, on injecte les composantes de la représentation paramétrique de la droite dans l'équation du plan :
>
> $$-(-t+7)+t-2+3(3t+6)+2=0 \Leftrightarrow t-7+t-2+9t+18+2=0 \Leftrightarrow 11t+11=0 \Leftrightarrow k=-1$$
>
> Puis, on remplace t par -1 dans l'équation paramétrique de la droite : $\begin{matrix} x=1+7=8 \\ y=-1-2=-3 \\ z=3\times(-1)+6=3 \end{matrix}$, ce qui nous donne les coordonnées du projeté orthogonal I' du point I sur le plan P : I'(8 ; -3 ; 3).
>
> La distance entre I et P correspond à la distance entre I et son projeté orthogonal I' sur P :
>
> $$II'=\sqrt{(8-7)^2+(-3-(-2))^2+(3-6)^2}=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$$

2. Déterminer la distance entre H(2 ; 4 ; 2) et la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x=t+2 \\ y=-3t+4 \\ z=2t-5 \end{cases}$, t dans $\mathbb{R}$

> **Solution :**
>
> Soit M$(x;y;z)$ le projeté orthogonal de H sur la droite et soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de cette droite, on alors :
>
> $\overrightarrow{HM}.\vec{u}=0$ avec $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z-2 \end{pmatrix}$ $et\ \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
>
> D'où : $1(x-2)-3(y-4)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow x-3y+2z+6=0$
>
> Par ailleurs le point M appartient à la droite, ses cordonnées sont donc de la forme $(t+2;-3t+4;2t-5)$
>
> On a alors : $t+2-3(-3t+4)+2(2t-5)+6=0 \Leftrightarrow 14t-14=0 \Leftrightarrow t=1$
>
> **Les coordonnées de M sont alors $(3;1;-3)$.**
>
> La distance entre H et la droite correspond à la distance entre H et son projeté orthogonal M sur la droite :
>
> $$HM=\sqrt{(3-2)^2+(1-4)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{1+9+25}=\sqrt{35}$$

EXERCICE 3 : (OBJECTIFS 1 ET 3 : ……points)



Soit le cube ABCDEFGH ci-contre d'arête 1cm, avec M et N milieux respectifs de [FB] et [FG],

Déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{MHN}$ arrondie au degré.

➔ *Vous utiliserez le repère* $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Solution :

Il s'agit de calculer $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HN}$ de deux façons différentes, dont une utilisant le cosinus de l'angle cherché.

Méthode avec les coordonnées :

$H(0;1;1) et\ M\left(1;0;\frac{1}{2}\right)\ donc\ \overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}1\\-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}; N\left(1;\frac{1}{2};1\right)\ donc\ \overrightarrow{HN}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}.$

On a alors : $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HN} = 1 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2}$.

Méthode avec le cosinus :

$\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HN} = HM \times HN \times \cos(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HN})$

Or $HM = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\ \ et\ HN = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Ainsi : $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HN} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HN}) = \frac{3\sqrt{5}}{4} \times \cos(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HN})$

On peut alors égaliser les deux produits scalaires :

$\frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4} \times \cos(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HN}) \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HN}) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\boldsymbol{(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HN}) \approx 27^{\circ}}$$

EXERCICE 4 : **(OBJECTIFS 6 : ……points)**

Déterminer l'équation paramétrique de la droite intersection des plans d'équations cartésiennes respectives : $-x+2z+1=0$ et $y-2z+4=0$

Solution :

Pour déterminer l'équation de la droite intersection, on a le système suivant :

$$\begin{cases} -x+2z+1=0 \\ y-2z+4=0 \\ z=k \end{cases}$$ en remplaçant z par k dans les 2 premières lignes, on obtient :

$$\begin{cases} -x+2k+1=0 \\ y-2k+4=0 \\ z=k \end{cases}$$ soit : $$\begin{cases} x=2k+1 \\ y=2k-4 \\ z=k \end{cases}$$

La droite intersection des plans d'équations cartésiennes respectives : $-x+2z+1=0$ et $y-2z+4=0$ a donc pour équation paramétrique : $$\begin{cases} x=2k+1 \\ y=2k-4 \quad ,k \text{ dans } \mathbb{R} \\ z=k \end{cases}$$