Nom : Prénom : Classe : Term ….	**INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES Nº7** **Mardi 31/01/2023_ corrigé**	
Thème : produit scalaire_ espace		***calculatrice autoriseé_ 45min***

<u>EXERCICE 1 :</u> (OBJECTIF 4 : ……points)

Soit le plan (P) dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\1\\5\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-2;3;-1)$. Déterminer une équation cartésienne de ce plan (P).

<u>Solution :</u>

Une équation cartésienne de (P) est du type : $-4x+y+5z+d=0$.

Puisque A appartient à (P), ses coordonnées vérifient l'équation de (P) :

$$-4\times(-2)+3+5\times(-1)+d=0 \Leftrightarrow d=-6$$

On a alors :

(P) : $\boldsymbol{-4x+y+5z-6=0}$

<u>EXERCICE 2 :</u> (OBJECTIFS 2 et 5 : ……points)

1. Soit $B(1;5;-2)$ et (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-t \\ y=1+2t\,, t\in R. \\ z=1+t \end{cases}$
   Déterminer les coordonnées du point K, projeté orthogonal de B sur la droite (d).

<u>Solution :</u>

Soit K$(x;y;z)$ le projeté orthogonal de B sur la droite (d) et soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de cette droite, on alors :

$\overrightarrow{BK}.\vec{u}=0$ avec $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}x-1\\y-5\\z+2\end{pmatrix}$ $et\ \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

D'où : $-1(x-1)+2(y-5)+(z+2)=0 \Leftrightarrow -x+2y+z-7=0$

Par ailleurs le point K appartient à la droite (d), ses cordonnées sont donc de la forme $(-t;1+2t;1+t)$

On a alors : $-(-t)+2(1+2t)+(1+t)-7=0 \Leftrightarrow 6t-4=0 \Leftrightarrow t=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Les coordonnées de K sont alors $(-\frac{2}{3};\frac{7}{3};\frac{5}{3})$.

2. Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est $-2x-5y+z-1=0$. Déterminer la distance du point $H(0;1;-2)$ au plan (P).

Solution :

Soit (d) la droite passant par H et orthogonale à (P), le point H' projeté orthogonal de H sur (P) est alors le point d'intersection de cette droite et du plan, et la distance entre H et (P) sera HH'.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal de (P) est alors un vecteur directeur de (d), une représentation paramétrique de (d) est alors : $\begin{cases}x=0-2t\\y=1-5t\,,t\in R\\z=-2+t\end{cases}$

Puisque H' appartient au plan (P), ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient $-2x-5y+z-1=0$.

Puisque H' appartient aussi à (d), ses coordonnées sont alors de la forme $(-2t;1-5t;-2+t)$.

On a alors : $-2(-2t)-5(1-5t)+(-2+t)-1=0 \Leftrightarrow 4t-5+25t-2+t-1=0 \Leftrightarrow 30t=8 \Leftrightarrow t=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$

H' a alors pour coordonnées $\left(-\frac{8}{15};-\frac{1}{3};-\frac{26}{15}\right)$.

La distance de h à (P) est alors HH'=$\sqrt{\left(-\frac{8}{15}-0\right)^2+\left(-\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(-\frac{26}{15}+2\right)^2}=\sqrt{\frac{32}{15}}=\frac{4\sqrt{30}}{15}$

<u>EXERCICE 3 :</u> (OBJECTIFS 1 ET 3 : ……points)

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère de l'espace et trois points $A(4;-2;1);B(0;1;1)et\ C(-1;1;1)$; avec $AB=5, BC=1$ et $AC=\sqrt{34}$.

Déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

Solution :

Il s'agit de calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ de deux façons différentes, dont une utilisant le cosinus de l'angle cherché.

<u>Méthode avec les coordonnées :</u>

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

On a alors : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-4+0+0=-4$.

<u>Méthode avec le cosinus :</u>

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\mathrm{BA}\times\mathrm{BC}\times\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

Ainsi : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=5\times1\times\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=5\times\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

On peut alors égaliser les deux produits scalaires :

$-4=5\times\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=-\frac{4}{5}$

$$\boldsymbol{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})\approx 143^{\text{o}}}$$

EXERCICE 4 : (OBJECTIFS 6 : ……points)

Soient (P_1) et (P_2) les plans d'équation cartésienne respective $3x - z = 0\ \ et\ x + y + z - 1 = 0$.

1. Expliquer pourquoi les plans $(P_1)\ \ et\ (P_2)$ ne sont pas parallèles.
   Soit $\overrightarrow{n_1}$ un vecteur normal de (P_1) et $\overrightarrow{n_2}$ un vecteur normal de (P_2), on a :

Solution :

$\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}\ et\ \overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires ($y_{\overrightarrow{n_1}} = 0 \neq y_{\overrightarrow{n_2}}$), donc **les plans ne sont pas parallèles.**

2. Soit (d) la droite d'intersection de ces deux plans. Déterminer une représentation paramétrique de cette droite.

Solution :

Les coordonnées des points de la droite d'intersection vérifient les deux équations cartésiennes de plans, on est alors ramené à résoudre : $\begin{cases} 3x - z = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

En remplaçant z par t, $t \in R$, dans les deux premières lignes, on a alors :

$$\begin{cases} 3x = t \\ x + y = -t + 1 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = -\frac{4}{3}t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite intersection des deux plans est donc :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{1}{3}t} \\ \boldsymbol{y = -\frac{4}{3}t + 1} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases}, \boldsymbol{t \in R}$$