Nom : Prénom : Classe : Term	**INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES N°6** **ENTRAÎNEMENT_ corrigé**	
Thème : fonction ln		***calculatrice autoriseé***

EXERCICE 1 :

Exprimer en fonction de $\ln 2$ l'expression $A = \ln 40 - \ln 10 + \ln 2 - \ln \sqrt{2}$.

$$A = \ln(4 \times 10) - \ln(10) + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \ln 4 + \ln 10 - \ln 10 \ + \frac{1}{2}\ln 2 = \ln 2^2 + \frac{1}{2}\ln 2 = 2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \boldsymbol{\frac{5}{2}\ln 2}$$

EXERCICE 2 :

Résoudre les équations/inéquations ci-dessous

1. $5\ln(x) - 2 = 8$

   $\Leftrightarrow 5\ln x = 10 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$ donc $\boldsymbol{S = \{e^2\}}$
2. $e^x - 4 = 0$

   $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$, $\boldsymbol{S = \{\ln 4\}}$

3. $\ln(x-2) + \ln(x+2) \leq \ln(4-x)$
   - Conditions d'existence : il faut que $x - 2 > 0 \ et \ x + 2 > 0 \ et \ 4 - x > 0$

   Soit $x > 2 \ et \ x > -2 \ et \ x < 4 \ \ donc \ x \in]2;4[= I$
   - $\ln(x-2) + \ln(x+2) \leq \ln(4-x) \Leftrightarrow \ln\big((x-2)(x+2)\big) \leq \ln(4-x) \ \ avec \ x \in I$

   $$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 4) \leq \ln(4-x); x \in I$$
   $$\Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 4 - x; x \in I$$
   $$\Leftrightarrow x^2 + x - 8 \leq 0; x \in I$$

   Résolution de $x^2 + x - 8 = 0$:

   $$\Delta = 33; x_1 = \frac{-1-\sqrt{33}}{2} \ et \ x_2 = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}$$

   Puisque $x \in I$, on a alors : $\boldsymbol{S = \left\{\frac{-1+\sqrt{33}}{2}\right\}}$

EXERCICE 3 :

Calculer les limites ci-dessous en justifiant vos réponses.

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} -2\ln(5-x)$

   $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} 5 - x = 0^+ \ et \ \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} \ln X = -\infty$ donc par composée et produit $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} -2\ln(5-x) = +\infty}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - 4x$

On remarque que l'on a une forme indéterminée, donc on factorise par le monôme de plus haut degré :

$\ln x - 4x = x\left(\frac{\ln x}{x} - 4\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée, donc par somme

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 4\right) = -4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 4\right) = -\infty}$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} (x-1)^2 \ln(x-1)$

$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} x - 1 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{X\to0 \\ >}} X^2 \ln X = 0$ par croissance comparée, donc par composée

$\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} (x-1)^2 \ln(x-1) = 0}$.

EXERCICE 4 :

1. Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous sans vous soucier de l'ensemble de définition.

a. $f(x) = x\ln x + 5x$

$$f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} + 5 = \ln x + 1 + 5 = \boldsymbol{\ln x + 6}$$

b. $g(x) = \ln(x^2 - 3x + 1)$

$\boldsymbol{g'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+1}}$ car $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

2. **a.** En déduire le sens de variation de la fonction f précédemment définie au 1.a) sur $]0; +\infty[$.

Il faut étudier le signe de $f'(x)$, donc résoudre $\ln x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq e^{-6}$

x	0		e^{-6}		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	0	+	

La fonction f est donc décroissante sur $]0; e^{-6}]$ et croissante sur $[e^{-6}; +\infty[$.

b. Déterminer l'équation de la tangente à C_f en 1.

$T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$T_1 : y = 6(x-1) + 5$ *soit* $\boldsymbol{y = 6x - 1}$

QUESTION BONUS : déterminer la position de C_f et de sa tangente en 1, T_1.

Il faut étudier le signe de $f(x) - (6x - 1)$ on peut aussi étudier la convexité de f.

$f''(x) = \frac{1}{x}$ or sur $]0; +\infty[$; $\frac{1}{x} > 0$ donc la fonction f est convexe, c'est-à-dire que sa courbe représentative est toujours au-dessus de ses tangentes et notamment de sa tangente en 1.