ര Éléments de correction de l'interrogation n°10 ര

Exercice 1 **1,5 points**

Exprimer en fonction de $\ln(3)$ l'expression $A = \ln(9) + \ln(15) - \ln(5\sqrt{3})$.

Solution :

$$\begin{aligned}
A &= \ln(9) + \ln(15) - \ln(5\sqrt{3}) \\
&= \ln(3^2) + \ln(3\times 5) - \ln(5\times\sqrt{3}) \\
&= 2\ln(3) + \ln(3) + \ln(5) - \ln(5) - \ln(\sqrt{3}) \\
&= 3\ln(3) + \ln(5) - \ln(5) - \frac{1}{2}\ln(3) \\
&= \frac{5}{2}\ln(3)
\end{aligned}$$

Exercice 2 **4 points**

Calculer les limites ci-dessous en justifiant vos réponses.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(x) - 6x^2$

Solution : Nous avons une forme indéterminée de la forme "$+\infty - (+\infty)$". Pour lever l'indétermination, on factorise par x^2 :

$$x^2\ln(x) - 6x^2 = x^2(\ln(x) - 6)$$

Or, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - 6 = +\infty$, donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\ln(x) - 6) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(-\frac{1}{5x}\right)$

Solution : Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{5x} = 0^+$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(-\frac{1}{5x}\right) = -\infty$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+3)+1}{(x^2+3)^5}$

Solution : Nous avons une forme indéterminée de la forme "$\frac{+\infty}{+\infty}$". Pour lever l'indétermination, on sépare le quotient en 2 :

$$\frac{\ln(x^2+3)+1}{(x^2+3)^5} = \frac{\ln(x^2+3)}{(x^2+3)^5} + \frac{1}{(x^2+3)^5}$$

En posant $X = x^2+3$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{(x^2+3)^5} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X^5} = 0$, par croissance comparée.

De plus, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(x^2+3)^5} = 0$.

Donc finalement, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+3)+1}{(x^2+3)^5} = 0$

.

Exercice 3 **5,5 points**

Résoudre les équations/inéquations ci-dessous lorsque c'est possible :

1. $e^x + 1 = 0$

Solution :

$$e^x + 1 = 0 \Longleftrightarrow e^x = -1$$

Or, la fonction exponentielle est à valeur dans $\mathbb{R}^+$, donc cette équation n'a pas de solution.

2. $8\ln(x) - 4 = 2$

Solution :

$$\begin{aligned} 8\ln(x) - 4 = 2 &\Longleftrightarrow 8\ln(x) = 6 \\ &\Longleftrightarrow \ln(x) = \frac{6}{8} \\ &\Longleftrightarrow x = e^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Cette équation a une solution qui est $x = e^{\frac{3}{4}}$

3. $\ln(1-x) - \ln(x+5) \geqslant \ln(x+2)$

Solution : Conditions d'existence des 3 termes $\ln(1-x)$, $\ln(x+5)$ et $\ln(x+2)$:

- $\ln(1-x)$ existe $\Longleftrightarrow 1 - x > 0 \Longleftrightarrow x < 1$
- $\ln(x+5)$ existe $\Longleftrightarrow x + 5 > 0 \Longleftrightarrow x > -5$
- $\ln(x+2)$ existe $\Longleftrightarrow x + 5 > 0 \Longleftrightarrow x > -2$

Si on veut respecter les 3 condition en même temps, il faut que x appartienne à : $I_e =]-2;1[$.
$\forall x \in I_e$:

$$\begin{aligned} \ln(1-x) - \ln(x+5) \geqslant \ln(x+2) &\Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{x+5}\right) \geqslant \ln(x+2) \\ &\Longleftrightarrow \frac{1-x}{x+5} \geqslant x+2, \text{ par croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Longleftrightarrow \frac{1-x}{x+5} - (x+2) \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{1-x-(x+2)(x+5)}{x+5} \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{1-x-x^2-5x-2x-10}{x+5} \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{-x^2-8x-9}{x+5} \geqslant 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant du polynôme au numérateur :
$\Delta = (-8)^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 64 - 36 = 28$.

Les deux racines sont donc : $x_1 = \dfrac{8+\sqrt{28}}{2\times(-1)} = \dfrac{8+2\sqrt{7}}{-2} = -4 - \sqrt{7} < -2$ et de même $x_2 = -4 + \sqrt{7} > -2$.

On peut donc faire le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{7}$		-5		$-4+\sqrt{7}$		$+\infty$
signe de $-x^2-8x-9$		$-$	0		$+$		0	$-$	
signe de $x+5$			$-$		0		$+$		
signe de $\dfrac{-x^2-8x-9}{x+5}$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $\dfrac{-x^2-8x-9}{x+5} \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \in J =]-\infty\,;\,-4-\sqrt{7}] \cup [-5\,;\,-4+\sqrt{7}[$

Finalement, $S = I_e \cap J =]-2\,;\,-4+\sqrt{7}]$.

4. $5 \times \left(\dfrac{4}{7}\right)^n \leqslant 0,05,\ n \in \mathbb{N}$

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
5 \times \left(\frac{4}{7}\right)^n \leqslant 0,05 &\Longleftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^n \leqslant \frac{0,05}{5} \\
&\Longleftrightarrow \ln\left(\left(\frac{4}{7}\right)^n\right) \leqslant \ln(0,01) \text{ , par croissance de la fonction } \ln \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \\
&\Longleftrightarrow n\ln\left(\frac{4}{7}\right) \leqslant \ln(0,01) \\
&\Longleftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{4}{7}\right)} \quad \text{, car} \quad \ln\left(\frac{4}{7}\right) < 0
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{4}{7}\right)} \approx 8,23$, donc : $S = \mathbb{N} \cap [9;+\infty[$, soit tous les nombres entiers supérieurs ou égaux à 9.

Exercice 4 **4 points**

Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous sans vous soucier de l'ensemble de définition :

1. **a.** $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

Solution :
$f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = 1+\ln(x)$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, et $v(x) = x^2$, donc $v'(x) = 2x$.

Donc : $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \dfrac{\frac{1}{x}\times x^2 - (1+\ln(x))\times 2x}{x^4} = \dfrac{x-2x-2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{x(-1-2\ln(x))}{x^4}$

Soit : $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$

b. $g(x) = \ln(3\,\mathrm{e}^x + 2)$

Solution : $g(x) = \ln(3\,\mathrm{e}^x+2) = \ln(u(x))$, avec $u(x) = 3\,\mathrm{e}^x + 2$, donc $u'(x) = 3\,\mathrm{e}^x$.
Donc : $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{3\,\mathrm{e}^x}{3\,\mathrm{e}^x+2}$

2. En déduire le sens de variation de la fonction f précédemment définie au 1.a) sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Solution : On a trouvé que $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.
Sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, $x^3 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-1-2\ln(x)$. Or :

$$-1-2\ln(x) > 0 \Longleftrightarrow -2\ln(x) > 1 \Longleftrightarrow \ln(x) < -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.
On peut donc faire le tableau de signe et de variation suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de $f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Calcul : $f(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}) = \dfrac{1+\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})}{\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{1}{2}\times \mathrm{e}^1 = \dfrac{\mathrm{e}^1}{2}$