Éléments de correction de l'interrogation écrite n°10

Exercice 1

1. Soient u et v deux fonctions telles que $v \circ u(x) = e^{\sqrt{2-x}}$.

a. Déterminer u et v :

> **Solution :**
>
> $u(x) = \sqrt{2-x}$ $\qquad\qquad$ $v(x) = e^x$

b. Déterminer l'intervalle de définition de $v \circ u$.

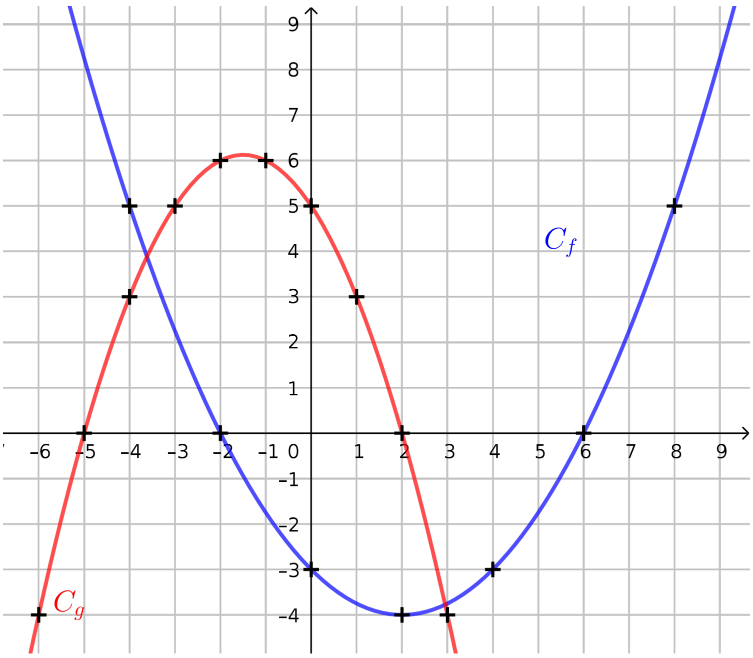
> **Solution :** Pour que l'expression sous la racine carrée ne soit jamais négative, il faut que :
>
> $$2 - x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant 2$$
>
> La fonction f est donc définie sur $]-\infty\,;\,2]$.

2. Soient $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = x^3$. Déterminer l'expression de $g \circ f(x)$:

> **Solution :**
>
> $$g \circ f(x) = (2x-1)^3$$

3. Lire les images demandées (les points placés ont des coordonnées entières) :

> **Solution :**



$$g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g(0) = 5$$

$$f \circ g(-2) = f(g(-2)) = f(6) = 0$$

$$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(-4) = 3$$

$$f \circ g(2) = f(g(2)) = f(0) = -3$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(\frac{2}{x} - 1\right)^3$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

> **Solution :** Il faut que $x \neq 0$ à cause du quotient. Donc la fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R}^*$

2. Déterminer la dérivée de la fonction f.

> **Solution :** $f(x) = u(x)^3$, où $u(x) = \frac{2}{x} - 1$, et donc $u'(x) = -\frac{2}{x^2}$.
> $\forall x \in D_f : f'(x) = 3 \times u'(x) \times u(x)^{3-2} = -\frac{6}{x^2}\left(\frac{2}{x} - 1\right)^2$

3. En déduire le sens de variation de f sur son ensemble de définition.

> **Solution :** $\forall x \in D_f$, $\left(\frac{2}{x} - 1\right)^2 > 0$ et $-\frac{6}{x^2} < 0$, donc $f'(x) < 0$.
>
> La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.

Question bonus
Dériver la fonction $v \circ u(x) = e^{\sqrt{2-x}}$ de l'exercice 1.

> **Solution :** La fonction est du type $e^u(x)$, avec $u(x) = \sqrt{2-x}$ définie sur $]-\infty\,;\,2]$.
> $\forall x \in]-\infty\,;\,2[: u'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$ (attention, il faut retirer la valeur 2 !)
>
> Donc : $\forall x \in]-\infty\,;\,2[:\ v \circ u'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^u(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} e^{\sqrt{2-x}} = \frac{-e^{\sqrt{2-x}}}{2\sqrt{2-x}}$