Sujet d'entraînement au devoir surveillé n°6

EXERCICE 1

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020+n$.
On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2\,000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

2. Calculer u_1 puis u_2.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1\,000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,000$.

- **a.** Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,9$.
- **b.** En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,000\,(1+0,9^n)$.
- **c.** Déterminer la limite de la suite (u_n).
  En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1\,000$).

- **a.** Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1\,020$.
  Justifier la réponse par un calcul.
- **b.** Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.
  Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while ......:
    u= ...
    n = ...
  return ...
```

EXERCICE 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A(2 ; 4 ; 0) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$;
- la droite $\mathscr{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3\\ y &=& 3+t\\ z &=& 3+t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ de la droite $\mathscr{D}'$.

b. Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, et M$'$ le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$.
On se propose de déterminer la distance MM$'$ appelée « distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ».

2. Montrer que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

3. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. En déduire qu'une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x - y - 5z = 0$.

c. On rappelle que M$'$ est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}'$.
Justifier que M$'$ est également le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.
En déduire que les coordonnées du point M$'$ sont (3 ; 1 ; 1).

4. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. Justifier que le point M a pour coordonnées (1 ; 2 ; 0).

c. Calculer la distance MM$'$.

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5t\\ y &=& 2+5t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathscr{P}$.
Exprimer le volume du tétraèdre ANMM$'$ en fonction de ℓ.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

c. Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d, les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont le même volume.

EXERCICE 3

Les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} *près*

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

- 48 % des salariés sont des femmes. Parmi elles, 16,5 % exercent une profession de cadre ;
- 52 % des salariés sont des hommes. Parmi eux, 21,5 % exercent une profession de cadre.

On choisit une personne au hasard parmi les salariés. On considère les évènements suivants :

- F : « la personne choisie est une femme » ;
- C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.

3. **a.** Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à $0,191$.

b. Les évènements F et C sont-ils indépendants ? Justifier.

4. Calculer la probabilité de F sachant C, notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.

On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à $0,191$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.

c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

6. Soit n un entier naturel.

On considère dans cette question un échantillon de n salariés.

Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à $0,99$?

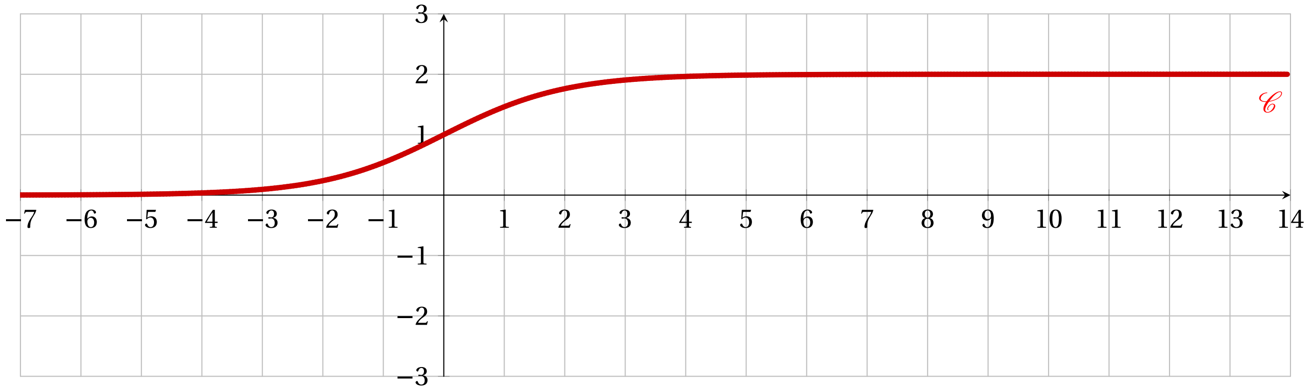
EXERCICE 4

Partie A

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

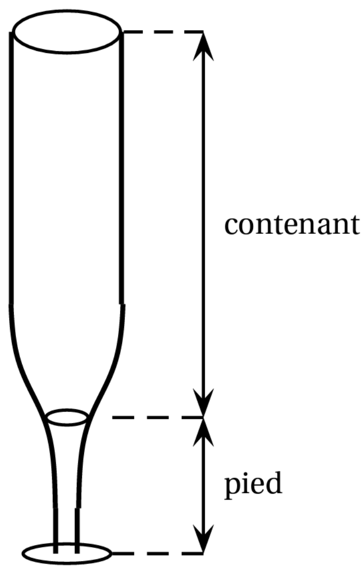
$$F(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction F dans un repère orthonormé.



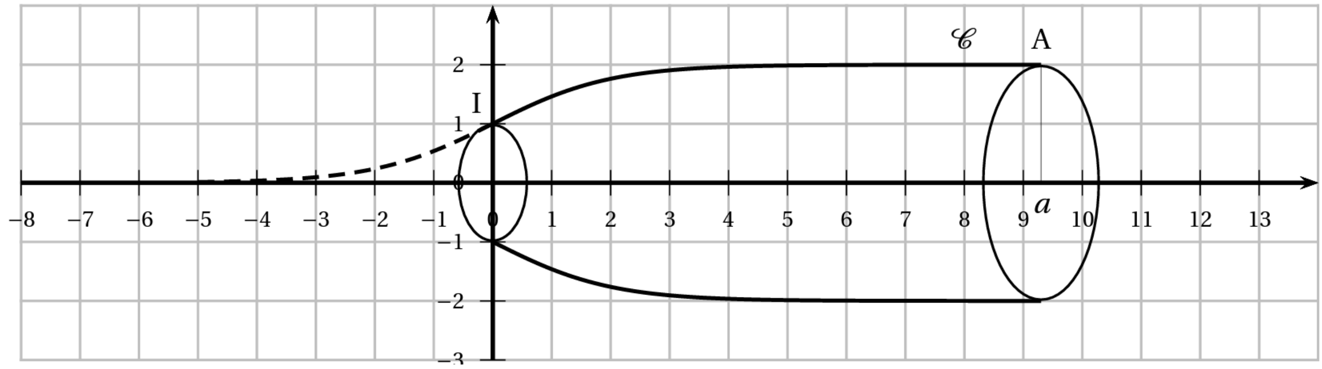
1. Calculer la limite de la fonction F en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Montrer que F est la primitive de $f : x \to \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$ qui vaut 1 en 0.
4. Étudier la convexité la fonction F sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point I$(0\,;\,1)$ et que sa tangente en ce point a pour coefficient directeur $0,5$.

Partie B



Une entreprise souhaite fabriquer de façon automatisé des flûtes (verres à pied) de forme allongée de contenance 12,5 cL. Chaque flûte est composée de deux parties comme sur l'illustration ci-contre : un pied, en verre plein, et un contenant de 12,5 cL.
À l'aide de la fonction f définie dans la **partie A**, le fabricant modélise le profil du contenant de la flûte de la manière décrite ci-dessous.

Soit A un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a strictement positive. La rotation autour de l'axe des abscisses appliquée à la partie de $\mathscr{C}$ limitée par les points I et A engendre une surface modélisant le contenant de la flûte en prenant pour unité 1 cm.
Ainsi x et $f(x)$ représente des longueurs en centimètres et l'objectif de cette partie est de déterminer la valeur de a pour que le volume du contenant soit égal à 12,5 cL.



Une unité représente 1 cm. La valeur de a utilisée sur le graphique ci-dessus ne correspond pas à la valeur cherchée.

1. Vérifier, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, l'égalité :

$$(F(x))^2 = 4\left(\frac{e^x}{e^x+1} + \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}\right).$$

2. Déterminer des primitives G et H sur $\mathbb{R}$ de des fonctions respectives suivantes :

$$g : x \longmapsto \frac{e^x}{e^x+1} \quad \text{et} \quad h : x \longmapsto \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}.$$

3. Le réel a étant strictement positif, on admet que le volume $V(a)$ de ce solide en cm^3 est donné par la formule :

$$V(a) = 4\pi(L(a) - L(0)) \text{ , où : } L(x) = G(x) + H(x).$$

En déduire que pour tout réel $a > 0$:

$$V(a) = 4\pi\left[\ln\left(\frac{e^a+1}{2}\right) + \frac{1}{e^a+1} - \frac{1}{2}\right].$$

4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de a à 0,1 près, sachant qu'une flûte doit contenir 12,5 cL, c'est-à-dire 125 cm^3. Aucune justification n'est attendue.

Partie C

Le responsable des ventes affirme que 98% des flûtes vendues par l'entreprise sont conformes.
Sous cette hypothèse, on considère les 400 premières flûtes fabriquées et on appelle C le nombre de flûtes conformes parmi toutes ces flûtes supposées indépendantes.

1. Décrire la loi de la variable C.

2. Expliquer pourquoi l'intervalle [386 ;397] est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95% associé à C. On arrondira les résultats à 10^{-4} près.

3. On constate que 13 des 400 flûtes ne sont pas conformes. En faisant le lien avec la question 2, que peut-on penser de l'affirmation du responsable ?