∽ Éléments de correction du sujet d'entraînement ∽

EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC - AMÉRIQUE DU SUD J2 - 27 SEPTEMBRE 2022

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020+n$.
On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

Solution : Diminuer de 10% c'est multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,9$.
On multiplie donc l'effectif de l'année n (soit u_n) par 0,9 puis on augmente cet effectif de 100 : on a donc : $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$

2. Calculer u_1 puis u_2.

Solution : • $u_0 = 2000$, d'où $u_1 = 0,9 \times u_0 + 100 = 0,9 \times 2000 + 100 = 1800 + 100 = 1900$;
• $u_1 = 1900$, d'où $u_2 = 0,9 \times u_1 + 100 = 0,9 \times 1900 + 100 = 1710 + 100 = 1810$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

Solution : Soit $\mathscr{P}(n)$ la double inégalité : $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation** : $1000 < 1900 \leqslant 2000$, soit $1000 < u_1 \leqslant u_0$: donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie (soit : $1000 < u_{k+1} \leqslant u_k$).
  Montrons alors que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire $1000 < u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$).
  On part de l'hypothèse de récurrence :
  $$\begin{aligned} 1000 < u_{k+1} \leqslant u_k &\iff 0,9 \times 1000 < 0,9 \times u_{k+1} \leqslant 0,9 \times u_k \\ &\iff 900 + 100 < 0,9u_{k+1} + 100 \leqslant 0,9u_k + 100 \\ &\iff 1000 < u_{k+2} \leqslant u_{k+1} : \text{donc } \mathscr{P}(k+1) \text{ est vraie} \end{aligned}$$
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} : 1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Solution : La récurrence précédente montre que :

— la suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$);
— la suite (u_n) est minorée par 1 000 (car $1000 \leqslant u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge donc vers une limite finie $\ell \geqslant 1000$.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.

Solution : Pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} = u_{n+1} - 1000 \Longleftrightarrow v_{n+1} = 0,9u_n + 100 - 1000 \Longleftrightarrow v_{n+1} = 0,9u_n - 900 = 0,9(u_n - 1000)$

$\Longleftrightarrow v_{n+1} = 0,9v_n$

Cette égalité vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1000(1 + 0,9^n)$.

Solution : On a donc $v_0 = u_0 - u_0 - 1000 = 2000 - 1000 = 1000$.

On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ (avec $q = 0,9$), soit $v_n = 1000 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 1000 \iff u_n = v_n + 1000$, soit $u_n = 1000 \times 0,9^n + 1000 = 1000(1 + 0,9^n)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

Solution : Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$, donc par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+0,9^n = 1$ puis, par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \times 1000 = 1000.$$

Cela signifie qu'au bout de nombreuses années la population va se rapprocher de 1 000 individus.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1000$).

a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1020$.

Justifier la réponse par un calcul.

Solution : On a :

$u_n \leqslant 1020 \iff 1000(1 + 0,9^n) \leqslant 1020 \iff 1000 + 1000 \times 0,9^n \leqslant 1020 \iff 1000 \times 0,9^n \leqslant 20$

$\iff 0,9^n \leqslant 0,02 \iff n \ln 0,9 \leqslant \ln 0,02$, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9}$, car $\ln 0,9 < 0$.

La calculatrice donne $\dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9} \approx 37,1$, donc le plus petit entier tel que $u_n \leqslant 1020$ est $n = 38$ ($u_{38} \approx$ 1018,25).

b. Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.

Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

Solution :

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while u >1 020 :
    u= 0.9*u+100
    n = n + 1
  return n
```

EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC - MÉTROPOLE J2 - 9 SEPTEMBRE 2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A(2 ; 4 ; 0) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$;
- la droite $\mathscr{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 \\ y & = & 3+t \\ z & = & 3+t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u'}$ de la droite $\mathscr{D}'$.

Solution : La droite $\mathscr{D}'$ a pour vecteur directeur $\vec{u'}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

b. Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

Solution : $y_{\vec{u}} = 2 \times x_{\vec{u'}}$ mais $x_{\vec{u}} \neq 2 \times x_{\vec{u'}}$: les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

Solution : La droite $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$, soit : $\left\{\begin{array}{rcl} x-2 & = & t \\ y-4 & = & 2t \\ z-0 & = & 0t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$

La droite $\mathscr{D}$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+t \\ y & = & 4+2t \\ z & = & 0 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$

OU

Solution : La droite $\mathscr{D}$ passe par le point A (2 ; 4 ; 0) et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; 2 ; 0), donc son équation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_A + x_{\vec{u}} \times t \\ y & = & y_A + u_{\vec{u}} \times t \\ z & = & z_A + z_{\vec{u}} \times t \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+t \\ y & = & 4+2t \\ z & = & 0 \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}.$$

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, et M′ le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$.

On se propose de déterminer la distance MM′ appelée « distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ».

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

Solution : Soit le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} = 2\times 1+(-1)\times 2+1\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{u}$.
- $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u'} = 2\times 0+(-1)\times 1+1\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{u'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est donc orthogonal aux deux vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, donc c'est un vecteur directeur de leur perpendiculaire commune Δ.

3. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Solution : Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 2\times 1+(-1)\times 2+(-5)\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{u}$.
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 2\times 2+(-1)\times(-1)+(-5)\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs (donc non colinéaires) du plan $\mathscr{P}$, donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. En déduire qu'une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x-y-5z=0$.

Solution : Le plan $\mathscr{P}$ est le plan ayant $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal et passant par A, donc c'est l'ensemble des points $\mathrm{P}(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{n}$.

$\overrightarrow{AP}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-2\\y-4\\z\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n} &\iff (x-2)\times 2+(y-4)\times(-1)+z\times(-5)=0\\ &\iff 2x-4-y+4-5z=0 \iff 2x-y-5z=0\end{aligned}$$

Donc une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x-y-5z=0$.

OU

Solution :

On sait qu'un plan a une équation cartésienne du type $ax+by+cz+d=0$ s'il a un vecteur normal de coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$, donc : $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $2x-y-5z+d=0$.

Comme $\mathrm{A}\,(2\,;\,4\,;\,0)\in\mathscr{P} \iff 2x_A-y_A-5z_A+d=0 \iff 4-4-0+d=0 \iff d=0$.

Finalement : le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $2x-y-5z=0$.

c. On rappelle que M′ est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}'$.
Justifier que M′ est également le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.
En déduire que les coordonnées du point M′ sont $(3\,;\,1\,;\,1)$.

Solution : Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite Δ et M′ est un point de la droite Δ ; donc M′ est un point du plan $\mathscr{P}$. M′ appartient à $\mathscr{D}'$ et à $\mathscr{P}$ donc M′ est le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.

Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de M′ vérifient donc le système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3\\ y &=& 3+t\\ z &=& 3+t\\ 2x-y-5z &=& 0\end{array}\right.$

$2x-y-5z=0$ devient $2\times 3-(3+t)-5(3+t)=0 \Longleftrightarrow 6-3-t-15-5t=0 \Longleftrightarrow -12=6t \Longleftrightarrow t=-2$.

$x=3$; $y=3+t=3-2=1$ et $z=3+t=1$

Les coordonnées du point M′ sont donc $(3\,;\,1\,;\,1)$.

4. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

Solution : La droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et passe par le point M′, donc elle a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_{M'}+x_{\overrightarrow{v}}t'\\ y &=& y_{M'}+y_{\overrightarrow{v}}t'\\ z &=& z_{M'}+z_{\overrightarrow{v}}t'\end{array}\right. \quad t'\in\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+2t'\\ y &=& 1-t'\\ z &=& 1+t'\end{array}\right. \quad t'\in\mathbb{R}.$

b. Justifier que le point M a pour coordonnées $(1\,;\,2\,;\,0)$.

Solution : Le point M est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de Δ donc ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t\\ y &=& 4+2t\\ z &=& 0\\ x &=& 3+2t'\\ y &=& 1-t'\\ z &=& 1+t'\end{array}\right.$

On a donc $\left\{\begin{array}{rcl} 2+t &=& 3+2t'\\ 4+2t &=& 1-t'\\ 0 &=& 1+t'\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{rcl} t &=& -1\\ -1 &=& t'\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t\\ y &=& 4+2t\\ z &=& 0\end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 2\\ z &=& 0\end{array}\right.$

Donc le point M a pour coordonnées $(1\,;\,2\,;\,0)$.

c. Calculer la distance MM′.

Solution :
$\mathrm{MM}'=\sqrt{(x_{\mathrm{M}'}-x_{\mathrm{M}})^2+(y_{\mathrm{M}'}-y_{\mathrm{M}})^2+(z_{\mathrm{M}'}-z_{\mathrm{M}})^2}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5t\\ y &=& 2+5t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Solution : On cherche l'intersection de la droite d et du plan $\mathscr{P}$, et pour cela on résout le système :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5t\\ y &=& 2+5t\\ z &=& 1+t\\ 2x-y-5z &=& 0\end{array}\right.$$
On a donc $2\times(5t)-(2+5t)-5(1+t)=0 \Longleftrightarrow 10t-2-5t-5-5t=0 \Longleftrightarrow 0t=7 \Longleftrightarrow 0=7$.
Le système n'a pas de solution donc la droite d est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.

b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathscr{P}$.
Exprimer le volume du tétraèdre ANMM$'$ en fonction de ℓ.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V=\dfrac{1}{3}\times B\times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Solution : On veut exprimer le volume V du tétraèdre ANMM$'$ en fonction de ℓ.
$V=\dfrac{1}{3}\times B\times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
Les points A, M et M$'$ appartiennent au plan $\mathscr{P}$ donc le triangle AMM$'$ forme une base du tétraèdre dont la hauteur est la distance du point N au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire ℓ.
La droite Δ est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ donc $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à Δ.
A appartient à $\mathscr{D}$, M est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de Δ, M$'$ appartient à Δ, et les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont perpendiculaires. On peut en déduire que le triangle AMM$'$ est rectangle en M.
$$\begin{aligned}\text{AM} &= \sqrt{(x_{\text{M}}-x_{\text{A}})^2+(y_{\text{M}}-y_{\text{A}})^2+(z_{\text{M}}-z_{\text{A}})^2}\\ &= \sqrt{(1-2)^2+(2-4)^2+(0-0)^2}=\sqrt{5}\end{aligned}$$
L'aire de la base, c'est-à-dire AMM$'$ vaut $\dfrac{1}{2}\times\text{AM}\times\text{MM}'=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.
Le volume du tétraèdre vaut donc $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{30}}{2}\times\ell=\dfrac{\ell\sqrt{30}}{6}$.

c. Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d, les tétraèdres $\text{AN}_1\text{MM}'$ et $\text{AN}_2\text{MM}'$ ont le même volume.

Solution : N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d.
La droite d est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$ donc les distances de N_1 et N_2 au plan $\mathscr{P}$ sont égales.
Les bases des tétraèdres $\text{AN}_1\text{MM}'$ et $\text{AN}_2\text{MM}'$ sont identiques (le triangle AMM$'$).
Donc les tétraèdres $\text{AN}_1\text{MM}'$ et $\text{AN}_2\text{MM}'$ ont le même volume.

EXERCICE 3 : D'APRÈS BAC - CENTRES ÉTRANGERS GROUPE 1D J2 - 19 MAI 2022

Les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} *près*

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

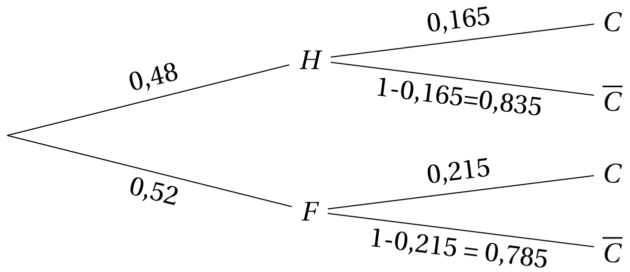
- 48 % des salariés sont des femmes. Parmi elles, 16,5 % exercent une profession de cadre ;
- 52 % des salariés sont des hommes. Parmi eux, 21,5 % exercent une profession de cadre.

On choisit une personne au hasard parmi les salariés. On considère les évènements suivants :

- F : « la personne choisie est une femme » ;
- C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Solution : L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.

Solution : Calculons $p(C\cap F)$: $p(C\cap F) = p_F(C)\times p(F) = 0,165\times 0,48 = 0,0792$

3. a. Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à $0,191$.

Solution : Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $p(C)$:
$p(C) = p(C\cap F) + p\left(C\cap\overline{F}\right) = p_F(C)\times p(F) + p_{\overline{F}}(C)\times p\left(\overline{F}\right) = 0,165\times 0,48 + 0,215\times 0,52 = 0,191.$

b. Les évènements F et C sont-ils indépendants ? Justifier.

Solution : Si les évènements F et C sont indépendants, alors $p(F\cap C) = p(F)\times p(C)$.
$p(F\cap C) = 0,0792$ et $p(F)\times p(C) = 0,48\times 0,191 = 0,09168 \neq p(F\cap C)$.
Les évènements F et C ne sont donc pas indépendants.

4. Calculer la probabilité de F sachant C, notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution : D'après la formule de Bayes : $p_C(F) = \dfrac{p(F\cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,0792}{0,191} \approx 0,4147.$
La probabilité de choisir une femme sachant qu'elle est cadre est égale à 0,4147.

5. On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.

On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à $0,191$.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Solution : L'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un salarié dans l'entreprise et regarder s'il est cadre ou non est une épreuve de Bernoulli. Nous considérons que le succès est l'événement "le salarié choisi est cadre". Le paramètre de l'épreuve de Bernoulli est donc $p = P(C) = 0,191$.

On répète cette épreuve de Bernoulli 15 fois de façon identique et indépendante (car on nous dit que le tirage est assimilé à un tirage avec remise). La variable aléatoire X comptant le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,191$: $X \sim \mathscr{B}(15\,;\,0,191)$

   b. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.

Solution :

$$\begin{aligned} p(X \leqslant 1) = p(X=0) + p(X=1) &= \binom{15}{0} \times 0,191^0 \times (1-0,191)^{15} + \binom{15}{1} \times 0,191^1 \times (1-0,191)^{15-1} \\ &\approx 0,1890. \end{aligned}$$

   c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

Solution : $E(X) = n \times p = 15 \times 0,191 = 2,865$.

6. Soit n un entier naturel.

On considère dans cette question un échantillon de n salariés.

Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à $0,99$?

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. Cherchons la plus petite valeur de n telle que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - p(X<1) \geqslant 0,99 \iff 1 - p(X=0) \geqslant 0,99 \iff -p(X=0) \geqslant -0,01 \\ &\iff p(X=0) \leqslant 0,01 \iff (1-0,191)^n \leqslant 0,01 \iff 0,809^n \leqslant 0,01. \\ &\iff 0,809^n \leqslant 0,01 \iff \ln(0,809^n) \leqslant \ln(0,01) \end{aligned}$$

, car la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\iff n \times \ln(0,809) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,809)} \text{ car } \ln(0,809) < 0.$$

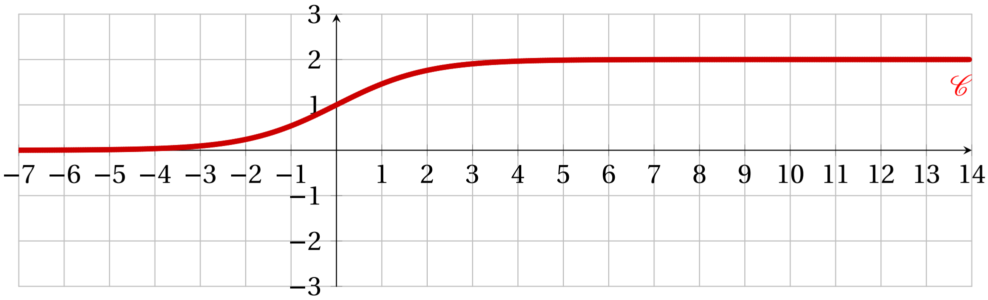
À la calculatrice : $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,809)} \approx 21,73$ donc $n \geqslant 22$.

Il faudra donc que la taille de l'échantillon choisi soit supérieure ou égale à 22.

EXERCICE 4 : D'APRÈS BAC S - MÉTROPOLE - 11 SEPTEMBRE 2020

Partie A

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction F dans un repère orthonormé.



1. Calculer la limite de la fonction F en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

> **Solution :**
> On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x + 1 = 1$, puis par quotient : $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \dfrac{0}{1} = 0$.
> On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$.

2. Montrer que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$.

> **Solution :** $F(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^x + 1) \times \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{2}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$
> Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \mathrm{e}^{-x} = 1$, puis par quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \dfrac{2}{1} = 2$.
> Ceci montre que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. Montrer que F est la primitive de $f : x \to \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$ qui vaut 1 en 0.

> **Solution :** La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas :
> $\forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1) - \mathrm{e}^x \times 2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = f(x)$.
> Donc F est bien une primitive de f.
> De plus, $F(0) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0 + 1} = \dfrac{2 \times 1}{1 + 1} = \dfrac{2}{2} = 1$: donc F est la primitive de f qui vaut 1 en 0.

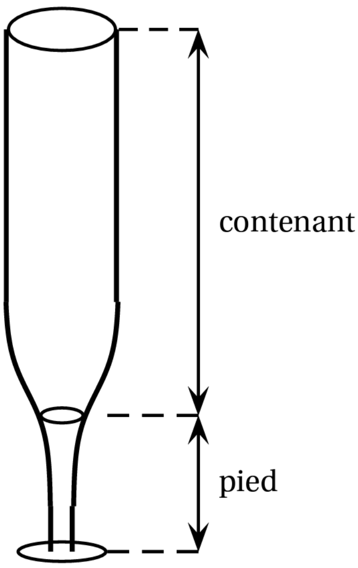
4. Étudier la convexité la fonction F sur $\mathbb{R}$.

> **Solution :** Pour étudier la convexité de F, il faut étudier le signe de sa dérivée seconde : $F'' = f'$.
> $$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1)^2 - 2\mathrm{e}^x \times 2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1)}{(\mathrm{e}^x + 1)^4} = \frac{(\mathrm{e}^x + 1)(2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1) - 2\mathrm{e}^x \times 2\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^4}$$
> $$= \frac{(\mathrm{e}^x + 1)(2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{2x})}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{2\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x + 1)^3} = \frac{2\mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^3}$$
> Or : $\forall x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x > 0$, donc : $2\,\mathrm{e}^x > 0$ et $(\mathrm{e}^x + 1)^3 > 1 > 0$. Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \mathrm{e}^x$.
> La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et elle vérifie $\mathrm{e}^0 = 1$, donc :
>
> - $1 - \mathrm{e}^x > 0 \Longleftrightarrow x < 0$: la fonction F est convexe sur $\mathbb{R}^-$
> - $1 - \mathrm{e}^x < 0 \Longleftrightarrow x > 0$: la fonction F est concave sur $\mathbb{R}^+$

5. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point I(0; 1) et que sa tangente en ce point a pour coefficient directeur 0,5.

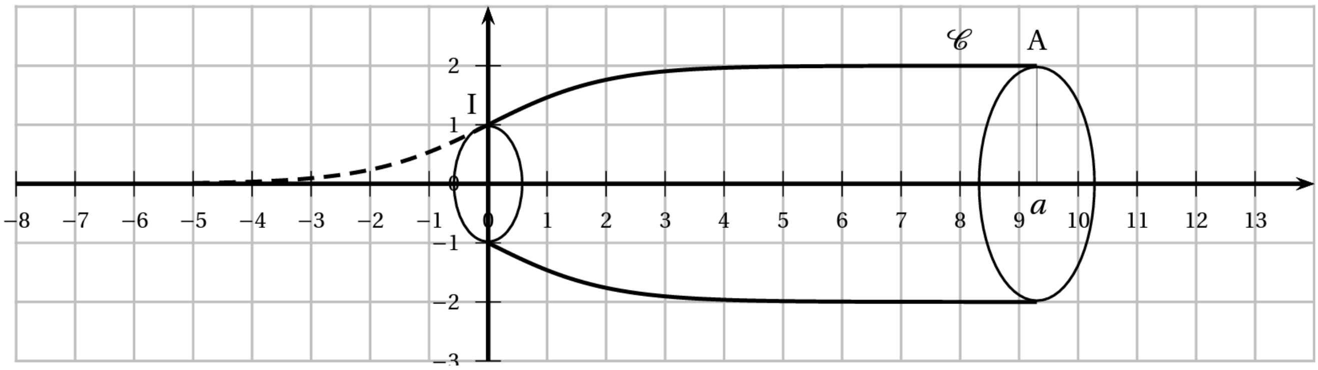
Solution : On a $F(0) = \dfrac{2}{1+1} = \dfrac{2}{2} = 1$, donc $\mathrm{I}\,(0\,;\,1) \in \mathscr{C}$.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point I a pour coefficient directeur $F'(0) = \dfrac{f(0)}{\mathrm{e}^0+1} = \dfrac{1}{2}$.

Partie B



Une entreprise souhaite fabriquer de façon automatisé des flûtes (verres à pied) de forme allongée de contenance 12,5 cL. Chaque flûte est composée de deux parties comme sur l'illustration ci-contre : un pied, en verre plein, et un contenant de 12,5 cL.
À l'aide de la fonction f définie dans la **partie A**, le fabricant modélise le profil du contenant de la flûte de la manière décrite ci-dessous.

Soit A un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a strictement positive. La rotation autour de l'axe des abscisses appliquée à la partie de $\mathscr{C}$ limitée par les points I et A engendre une surface modélisant le contenant de la flûte en prenant pour unité 1 cm.
Ainsi x et $f(x)$ représente des longueurs en centimètres et l'objectif de cette partie est de déterminer la valeur de a pour que le volume du contenant soit égal à 12,5 cL.



Une unité représente 1 cm.
La valeur de a utilisée sur le graphique ci-dessus ne correspond pas à la valeur cherchée.

1. Vérifier, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, l'égalité :

$$(F(x))^2 = 4\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} + \frac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right).$$

Solution :

$$4\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} + \frac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right) = 4\left(\frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right)-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right) = 4\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right) = 4\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right)$$
$$= 4\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)^2 = \left(\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)^2 = (F(x))^2$$

2. Déterminer des primitives G et H sur $\mathbb{R}$ de des fonctions respectives suivantes :

$$g : x \longmapsto \frac{e^x}{e^x+1} \quad \text{et} \quad h : x \longmapsto \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Solution : $g : x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$ et $h : x \longmapsto \dfrac{-e^x}{(e^x+1)^2}$.
Si $u(x) = e^x + 1$, alors $u'(x) = e^x$:

- on a $g(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ qui a pour primitive $G : x \longmapsto \ln(u(x))$, soit $G : x \longmapsto \ln(e^x+1)$ car $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
- on a $h(x) = \dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$ qui a pour primitive $H : x \longmapsto \dfrac{1}{u(x)}$, soit $H : x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+1}$.

3. Le réel a étant strictement positif, on admet que le volume $V(a)$ de ce solide en cm^3 est donné par la formule :

$$V(a) = 4\pi(L(a) - L(0)) \text{ , où : } L(x) = G(x) + H(x).$$

En déduire que pour tout réel $a > 0$:

$$V(a) = 4\pi\left[\ln\left(\frac{e^a+1}{2}\right) + \frac{1}{e^a+1} - \frac{1}{2}\right].$$

Solution : D'après les résultats précédents :
$V(a) = 4\pi(L(a) - L(0)) = 4\pi(G(a) + H(a) - G(0) - H(0)) = 4\pi(\ln(e^a+1) + \dfrac{1}{e^a+1} - \ln(e^0+1) - \dfrac{1}{e^0+1})$
$= 4\pi(\ln(e^a+1) + \dfrac{1}{e^a+1} - \ln(2) - \dfrac{1}{2}) = 4\pi\left[\ln\left(\dfrac{e^a+1}{2}\right) + \dfrac{1}{e^a+1} - \dfrac{1}{2}\right]$.

4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de a à $0,1$ près, sachant qu'une flûte doit contenir 12,5 cL, c'est-à-dire 125 cm^3. Aucune justification n'est attendue.

Solution : On cherche une valeur approchée de a à $0,1$ près, sachant qu'une flûte doit contenir 12,5 cL donc 125 cm^3.
La calculatrice donne $V(11,1403) \approx 125$; donc $a \approx 11,1$ à 10^{-1} près.

Partie C

Le responsable des ventes affirme que 98% des flûtes vendues par l'entreprise sont conformes.
Sous cette hypothèse, on considère les 400 premières flûtes fabriquées et on appelle C le nombre de flûtes conformes parmi toutes ces flûtes supposées indépendantes.

1. Décrire la loi de la variable C.

Solution : L'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard une flûte fabriquée dans l'entreprise et regarder si elle est conforme ou non est une épreuve de Bernoulli. Nous considérons que le succès est l'événement "la flûte choisie est conforme". Le paramètre de l'épreuve de Bernoulli est donc $p = 0,98$.
On répète cette épreuve de Bernoulli 400 fois de façon identique et indépendante (car on nous dit que les flûtes sont indépendantes les unes des autres). La variable aléatoire X comptant le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,98$: $X \sim \mathscr{B}(400 ; 0,98)$

2. Expliquer pourquoi l'intervalle $[386\,;397]$ est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95% associé à C. On arrondira les résultats à 10^{-4} près.

> **Solution :** $P(C \in [386\ ;\ 397] = P(386 \leqslant C \leqslant 397) = P(C \leqslant 397)) - P(C \leqslant 385) \approx 0,9541 > 0,95$: donc l'intervalle $[386\,;397]$ est bien un intervalle de fluctuation au seuil de 95% associé à C.
>
> Vérifions qu'il est bien centré, c'est-à-dire que $P(C > 397) < \dfrac{0,05}{2}$ et que $P(C < 385) < \dfrac{0,05}{2}$:
>
> - $P(C > 397) = 1 - P(C \leqslant 397) \approx 0,0131 < 0,025$
> - $P(C < 385) = P(C \leqslant 384) \approx 0,0076 < 0,025$
>
> Donc finalement : l'intervalle $[386\,;397]$ est bien un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95% associé à C.

3. On constate que 13 des 400 flûtes ne sont pas conformes. En faisant le lien avec la question 2, que peut-on penser de l'affirmation du responsable ?

> **Solution :** Si 13 flûtes sont non conformes, cela signifie qu'il y en a $400 - 13 = 387$ conformes. Or, $387 \in [386\ ;\ 397]$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% trouvé précédemment.
>
> Il n'y a donc pas de raison de remettre en doute l'affirmation du responsable.