Devoir surveillé n°6

Mardi 14 mars

Exercice 1 : OBLIGATOIRE **10 points**

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{2\ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}.$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

x	0	1	e	$+\infty$
Variations de g	$\|\|$ $-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$\frac{2}{\mathrm{e}}$ $\searrow$	0

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

   a. la valeur $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$;

   b. les variations de la fonction g sur son ensemble de définition;

   c. les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=[\ln(x)]^2.$$

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.
2. À l'aide de la partie 1, étudier :

   a. la convexité de la fonction f ;

   b. les variations de la fonction f.

3. **a.** Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.

   b. En déduire que, pour tout réel x dans $]0\,;\,\mathrm{e}]$:

$$[\ln(x)]^2 \geqslant \frac{2}{\mathrm{e}}x-1.$$

Vous devez faire au choix UN SEUL des exercices parmi les exercices 2, 3 et 4

EXERCICE 2 **10 points**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n^2$.

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

b. Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée *suite_u* et prend pour paramètre l'entier naturel p.
Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n).

```
def suite_u(p) :
  u= ...
  for i in range(1,...) :
    u =...
  return u
```

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 4$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. **a.** Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \dfrac{1}{5}\ell^2$.

b. En déduire la valeur de ℓ.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.

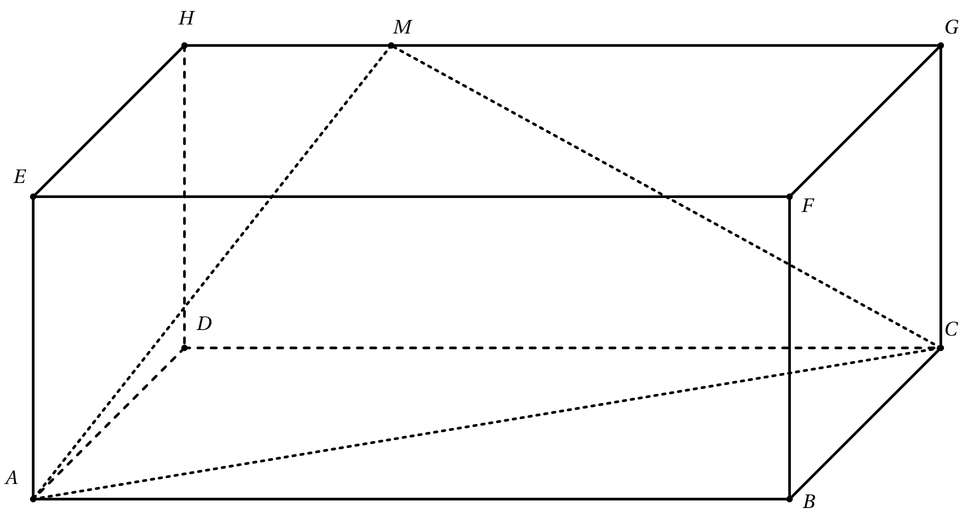
b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.

c. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de w_n en fonction de n et montrer que $v_n = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.

5. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 3 **10 points**

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que
AB = 5, AD = 3 et AE = 2.
L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées (5 ; 0 ; 0), (0 ; 3 ; 0) et (0 ; 0 ; 2).



1. **a.** Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.

   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{\text{HM}} = k\overrightarrow{\text{HG}}$ avec k un nombre réel de l'intervalle [0 ; 1].

   a. Justifier que les coordonnées de M sont $(5k\ ;\ 3\ ;\ 2)$.

   b. En déduire que $\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \overrightarrow{\text{CM}} = 25k^2 - 25k + 4$.

   c. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées (1 ; 3 ; 2).
On admet que le triangle AMC est rectangle en M .
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\dfrac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées (1 ; 3 ; 0).

   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).

   b. Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

   c. En déduire le volume du tétraèdre MACD.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).
   Calculer la distance DP ; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

EXERCICE 4 **10 POINTS**

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne n° 1 ;
- 30 % des composants sont conçus sur la chaîne n° 2 ;
- les composants restant sont conçus sur la chaîne n° 3.

À l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne n° 1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne n° 2 et 4 % des pièces issues de la chaîne n° 3.
On prélève au hasard un de ces composants. On note :

- C_1 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 1 » ;
- C_2 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 2 » ;
- C_3 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 3 » ;
- D l'évènement « le composant est défectueux »et $\overline{D}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} *si nécessaire.*

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n° 3 et soit défectueux.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement D est $P(D) = 0{,}0145$.
4. Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n° 3.

PARTIE B

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituant des lots de n unités. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot.
Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}0145$.

1. Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose $n = 20$.
   a. Calculer la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.
   b. Calculer la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux.
   En déduire la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux.
2. Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de n composants soit supérieure à $0,85$.
   Il propose de former des lots de 11 composants au maximum. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

PARTIE C

Les coûts de fabrication des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 1, 12 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 2 et 9 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 3.
Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.