Éléments de correction du devoir surveillé n°6

Exercice 1 : d'après bac - Polynésie - 30 août 2022 **10 points**

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x}$

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $g'(x)=\dfrac{2-2\ln(x)}{x^2}$.

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ g'(x)=\dfrac{\frac{2}{x}\times x-2\ln(x)\times 1}{x^2}=\dfrac{2-2\ln(x)}{x^2}$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		e		$+\infty$
Variations de g	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

a. la valeur $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$;

Solution : La valeur $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ est l'image de e par g : $g(\mathrm{e})=\dfrac{2\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

b. les variations de la fonction g sur son ensemble de définition;

Solution : $g'(x)=\dfrac{2-2\ln(x)}{x^2}$ donc $g'(x)$ est du signe de $2-2\ln(x)=2(1-\ln(x))$.

- Sur $]0\,;\mathrm{e}[$, $\ln(x)<1$ donc $1-\ln(x)>0$ donc $g'(x)>0$; la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
- Sur $]\,\mathrm{e}\,;+\infty[$, $\ln(x)>1$ donc $1-\ln(x)<0$ donc $g'(x)<0$; la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle.

c. les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

Solution :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$. Donc, par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\ln(x)\times\dfrac{1}{x}=-\infty$.
- D'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Solution :

x	0		1		$+\infty$
signe de $g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = [\ln(x)]^2.$$

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

> **Solution :** $[(u(x)^2]' = 2u'(x)u(x)$ donc $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x} = g(x)$
> Donc sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. À l'aide de la partie 1, étudier :

a. la convexité de la fonction f ;

> **Solution :** On étudie la convexité de la fonction f.
> D'après les questions précédentes, la fonction g, dérivée de la fonction f, est croissante sur $]0\,;\mathrm{e}[$, donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.
> De même, la fonction g, dérivée de la fonction f, est décroissante sur $]\,\mathrm{e}\,;+\infty[$, donc la fonction f est concave sur cet intervalle.
> De plus, la fonction g donc la fonction f', change de sens de variation en $x = \mathrm{e}$, donc la courbe représentant la fonction f admet un point d'inflexion en $x = \mathrm{e}$.

b. les variations de la fonction f.

> **Solution :** On étudie les variations de la fonction f en utilisant le signe de $f' = g$.
> Sur l'intervalle $]0\,;1[$, la fonction g est négative donc f' est négative ; la fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.
> Sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, la fonction g est positive donc f' est positive ; la fonction f est donc strictement croissante sur cet intervalle.
> De plus on peut dire que la fonction f admet un minimum pour $x = 1$.

3. a. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.

> **Solution :** Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e est : $y = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$. On a : $f'(\mathrm{e}) = g(\mathrm{e}) = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$; $f(\mathrm{e}) = (\ln \mathrm{e})^2 = 1$
> L'équation devient : $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1$ soit $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 2 + 1$ c'est-à-dire $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$.

b. En déduire que, pour tout réel x dans $]0\,;\,\mathrm{e}]$:

$$[\ln(x)]^2 \geqslant \frac{2}{\mathrm{e}}x - 1.$$

> **Solution :** La courbe représentant f admet un point d'inflexion en $x = \mathrm{e}$ donc la tangente en ce point coupe la courbe ; à gauche du point, la fonction est convexe donc la courbe est au dessus de cette tangente.
> On en déduit que sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$, on a : $[\ln(x)]^2 \geqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$.

EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC - AMÉRIQUE DU SUD J1 - 26 SEPTEMBRE 2022 — 10 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

> **Solution :** $u_1 = \frac{1}{5} \times u_0^2 = \frac{1}{5} \times 4^2 = \frac{16}{5}$ et $u_2 = \frac{1}{5} \times u_1^2 = \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^2}{5} = \frac{256}{125}$

b. Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée *suite_u* et prend pour paramètre l'entier naturel p.
Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n).

```
def suite_u(p) :
  u= ...
  for i in range(1,...) :
    u =...
  return u
```

> **Solution :**

```
def suite_u(p) :
  u = 4
  for i in range(1,p + 1) :
      u = u*u/5
  return u
```

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 4$.

Solution : Soit $\mathscr{P}_n$ la double inégalité $0 < u_n \leqslant 4$.

- **Initialisation :** $u_0 = 4$ et $0 < 4 \leqslant 4$, soit $0 < u_0 \leqslant 4$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** on suppose qu'il existe un entier k tel que $\mathscr{P}_k$ vraie (c'est-à-dire $0 < u_k \leqslant 4$)
  Montrons alors que $\mathscr{P}_{k+1}$ vraie (c'est-à-dire $0 < u_{k+1} \leqslant 4$)
  D'après l'hypothèse de récurrence, on a :
  $0 < u_k \leqslant 4 \Longleftrightarrow 0 < u_k^2 \leqslant 16$, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$.
  $$\Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{5}u_k^2 \leqslant \frac{16}{5}$$
  $$\Longrightarrow 0 < \frac{1}{5}u_k^2 \leqslant 4 \text{ , car } \frac{16}{5} = 3{,}2 \leqslant 4$$
  $$\Longrightarrow 0 < u_{k+1} \leqslant 4$$
  Donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < u_n \leqslant 4$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Solution : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n^2 - u_n = u_n\left(\frac{u_n}{5} - 1\right) = u_n\left(\frac{u_n - 5}{5}\right)$
$u_n \leqslant 4$ donc $u_n - 5 < 0$; or $u_n > 0$ donc $u_n(u_n - 5) < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$
On en conclut que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

> **Solution :** Pour tout n, $0 < u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 0.
> La suite (u_n) est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente (vers une limite ℓ telle que $0 \leqslant \ell \leqslant 4$).

3. a. Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.

> **Solution :** Soit $f : x \in \mathbb{R} \to \frac{1}{5}x^2$. On a :
> - $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_{n+1}$.
> - (u_n) converge vers une limite finie ℓ telle que $0 \leqslant \ell \leqslant 4$.
> - la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale.
>
> D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Soit : $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.

b. En déduire la valeur de ℓ.

> **Solution :** ℓ est solution de l'équation $x = \frac{1}{5}x^2$; on résout cette équation.
> $x = \frac{1}{5}x^2 \iff x\left(1 - \frac{1}{5}x\right) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 5$
> Or, on sait que $0 \leqslant \ell \leqslant 4$: la solution $\ell = 5$ n'est donc pas valable donc $\ell = 0$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.

> **Solution :**
> $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n^2\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln\left(u_n^2\right) = -\ln(5) + 2\ln(u_n) = 2\ln(u_n) - \ln(5) = 2v_n - \ln(5)$

b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.

> **Solution :** $w_n = v_n - \ln(5)$ donc $v_n = w_n + \ln(5)$
> $w_{n+1} = v_{n+1} - \ln(5) = 2v_n - \ln(5) - \ln(5) = 2(w_n + \ln(5)) - 2\ln(5)$
> $= 2w_n + 2\ln(5) - 2\ln(5) = 2w_n$
> Donc la suite (w_n) est géométrique de raison 2.

c. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de w_n en fonction de n et montrer que $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.

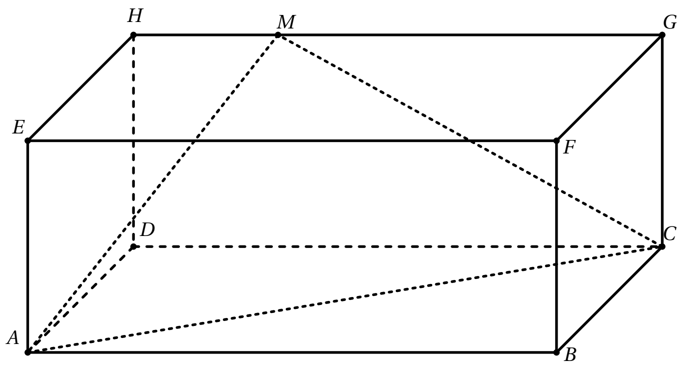
> **Solution :** $v_0 = \ln(u_0) = \ln(4)$ donc $w_0 = v_0 - \ln(5) = \ln(4) - \ln(5) = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$
>
> La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_0 = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$ donc, pour tout entier naturel n, on a : $w_n = w_0 \times q^n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n$.
>
> Pour tout n, $v_n = w_n + \ln(5)$ donc $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.

5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution : Comme $2>1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$. De plus, $\dfrac{4}{5}<1$ donc $\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)<0$.
Donc, par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{4}{5}\right)\times 2^n = -\infty$, puis par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
$v_n = \ln(u_n)$ donc $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{v_n} = 0$.
On a donc redémontré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 3 : D'APRÈS BAC - AMÉRIQUE DU SUD J1 - 26 SEPTEMBRE 2022 — 10 points

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que
AB = 5, AD = 3 et AE = 2.
L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5;0;0)$, $(0;3;0)$ et $(0;0;2)$.



1. **a.** Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.

Solution : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point H a pour coordonnées $(0;3;2)$.
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point G a pour coordonnées $(5;3;2)$.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).

Solution : La droite (GH) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{HG}$ de coordonnées $(5;0;0)$.
De plus, elle passe par le point G donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_G + x_{\overrightarrow{HG}}\times t \\ y &=& y_G + y_{\overrightarrow{HG}}\times t \\ z &=& z_G + z_{\overrightarrow{HG}}\times t \end{array}\right., \text{avec } t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5+5t \\ y &=& 3 \\ z &=& 2 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{\text{HM}} = k\overrightarrow{\text{HG}}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0;1]$.

a. Justifier que les coordonnées de M sont $(5k\,;\,3\,;\,2)$.

Solution : $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_{\text{M}}-0 &=& 5k \\ y_{\text{M}}-3 &=& 0 \\ z_{\text{M}}-2 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_{\text{M}} &=& 5k \\ y_{\text{M}} &=& 3 \\ z_{\text{M}} &=& 2 \end{array}\right.$
Donc les coordonnées de M sont $(5k\,;\,3\,;\,2)$.

b. En déduire que $\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \overrightarrow{\text{CM}} = 25k^2 - 25k + 4$.

Solution : Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont celles de M donc : $(5k\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
Les coordonnées de C sont $(5\,;3\,;0)$, donc celles de $\overrightarrow{CM}$ sont $(5k-5\,;3-3\,;2-0)$ soit $(5k-5\,;0\,;2)$.
$\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \overrightarrow{\text{CM}} = 5k \times (5k-5) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 25k^2 - 25k + 4$

c. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Solution : Le triangle AMC est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{\text{AM}} \perp \overrightarrow{\text{CM}}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \overrightarrow{\text{CM}}$ ou encore $25k^2 - 25k + 4 = 0$.
On résout cette équation. $\Delta = (-25)^2 - 4 \times 25 \times 4 = 225 = 15^2$
L'équation admet deux solutions $k_1 = \dfrac{25+15}{2 \times 25} = \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5}$ et $k_2 = \dfrac{25-15}{2 \times 25} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$
Donc pour $k = \dfrac{1}{5}$ ou $k = \dfrac{4}{5}$, le triangle AMC est rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1\,;3\,;2)$.
On admet que le triangle AMC est rectangle en M .
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\dfrac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées $(1\,;3\,;0)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).

Solution : Le plan (ACD) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, donc il a pour équation cartésienne $z = 0$.

b. Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

Solution : $z_\text{K} = 0$ donc le point K appartient au plan (ACD).
$\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $(0\,;0\,;-2)$, donc
- $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AC}$.

On en déduit que $\overrightarrow{MK}$ est orthogonal au plan (ACD), et donc que K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

c. En déduire le volume du tétraèdre MACD.

Solution : Le volume du tétraèdre MACD est : $\dfrac{1}{3} \times \text{Aire de ACD} \times \text{MK}$.
$\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $(0\,;0\,;-2)$, donc $\text{MK} = 2$.
Le triangle ACD est rectangle en D donc a pour aire $\dfrac{\text{AD} \times \text{DC}}{2} = \dfrac{3 \times 5}{2} = \dfrac{15}{2}$.
Le volume du tétraèdre MACD est donc, en unités de volume : $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{15}{2} \times 2 = 5$.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).
Calculer la distance DP ; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

Solution : Si on considère D comme sommet du tétraèdre MACD, la base est le triangle AMC, et la hauteur est DP.
Le triangle AMC est rectangle en M donc son aire est : $\dfrac{\text{AM} \times \text{MC}}{2}$.
$\text{AM} = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{14}$
$\text{CM} = \sqrt{(1-5)^2 + (3-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20}$
L'aire de AMC vaut : $\dfrac{\sqrt{14} \times \sqrt{20}}{2} = \sqrt{70}$.
Le tétraèdre MACD a donc pour volume : $\dfrac{1}{3} \times \sqrt{70} \times \text{DP}$ soit : $\dfrac{\text{DP}\sqrt{70}}{3}$.
On sait que ce volume vaut 5, donc : $\dfrac{\text{DP}\sqrt{70}}{3} = 5$ donc : $\text{DP} = \dfrac{15}{\sqrt{70}} \approx 1,8$.

EXERCICE 4 : D'APRÈS BAC - AMÉRIQUE DU SUD J2 - 27 SEPTEMBRE 2022 **10 POINTS**

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne n° 1 ;
- 30 % des composants sont conçus sur la chaîne n° 2 ;
- les composants restant sont conçus sur la chaîne n° 3.

À l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne n° 1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne n° 2 et 4 % des pièces issues de la chaîne n° 3.
On prélève au hasard un de ces composants. On note :

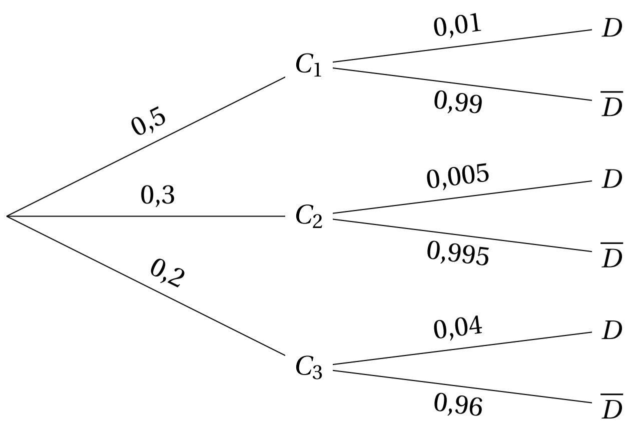
- C_1 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 1 » ;
- C_2 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 2 » ;
- C_3 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 3 » ;
- D l'évènement « le composant est défectueux »et $\overline{D}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} si nécessaire.

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.

Solution :



2. Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n° 3 et soit défectueux.

Solution : On a $p(C_3 \cap D) = p(C_3) \times p_{C_3}(D) = 0,2 \times 0,04 = 0,008$.

3. Montrer que la probabilité de l'évènement D est $P(D) = 0{,}0145$.

Solution : De même $p(C_1 \cap D) = p(C_1) \times p_{C_1}(D) = 0,5 \times 0,01 = 0,005$.
$p(C_2 \cap D) = p(C_2) \times p_{C_2}(D) = 0,3 \times 0,005 = 0{,}0015$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(D) = p(C_1 \cap D) + p(C_2 \cap D) + p(C_3 \cap D) = 0,005 + 0{,}0015 + 0,008 = 0{,}0145$.

4. Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n° 3.

Solution : On a $p_D(C_3) = \dfrac{p(D \cap C_3)}{p(D)} = \dfrac{0,008}{0{,}0145} \approx 0{,}55172$, soit $0{,}5517$ à 10^{-4} près.

PARTIE B

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituant des lots de n unités. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot. Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}0145$.

1. Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose $n = 20$.
   a. Calculer la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.

Solution : On a la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0{,}0145)$, donc la probabilité qu'un lot possède exactement trois composants défectueux sur 20 est égale à :
$\binom{20}{3}0{,}0145^3 \times (1 - 0{,}0145)^{17} \approx 0{,}00271$, soit $0{,}0027$ à 10^{-4} près.

   b. Calculer la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux.
   En déduire la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux.

Solution : La probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux est égale à $(1 - 0{,}0145)^{20} \approx 0{,}74667$, soit $0{,}7467$ à 10^{-4} près.
Donc la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux est $1 - 0{,}74667 \approx 0{,}2533$.

2. Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de n composants soit supérieure à $0,85$.
   Il propose de former des lots de 11 composants au maximum. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

Solution : X suivant la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}0145$, on a :
$p(X = 0) \geqslant 0,85 \iff (1 - 0{,}0145)^n \geqslant 0,85$ ou encore $0{,}9855^n \geqslant 0,85$, d'où par croissance de la fonction logarithme népérien :
$n \ln 0{,}9855 \geqslant \ln 0,85$ et enfin $n \leqslant \dfrac{\ln 0,85}{\ln 0{,}9855}$ (car $\ln 0{,}9855 < 0$).
Or $\dfrac{\ln 0,85}{\ln 0{,}9855} \approx 11,1$.
11 composants au maximum par lot conviennent : le directeur a raison.

PARTIE C

Les coûts de fabrication des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 1, 12 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 2 et 9 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 3.
Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.

Solution : Le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise est égal à :

$$0,5 \times 15 + 0,3 \times 12 + 0,2 \times 9 = 7,5 + 3,6 + 1,8 = 12,9$$

soit 12,90 € par composant.