DS Nº5 _ ENTRAÎNEMENT	Term. spé

EXERCICE 1: PROBAS

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.
Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.
On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques »;
- T : « le test est positif »;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. Calculer $P(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0{,}2625$.
3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.
4. a. Parmi les évènements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\overline{A} \cap T$, $A \cap \overline{T}$, $\overline{A} \cap \overline{T}$.
   b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».
   Démontrer que $p(E) = 0{,}0625$.

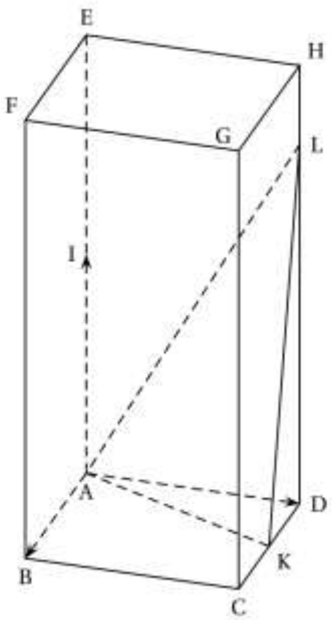
Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.
On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.
   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}0625$.
   b. Calculer $P(X = 7)$.
   c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à $0{,}95$?

EXERCICE 2: ESPACE

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci- dessous. Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AI}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0\,;\,1\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6\,;\,-3\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).

c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).

d. En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{40}{49}\,;\,\frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. **a.** Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.

b. Calculer la distance du point D au plan (AKL).

c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

EXERCICE 3: VRAI/FAUX justifier

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\ln(x^2-1)}{x-1} = -\infty$ **VRAI** ☐ **FAUX** ☐
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x-1} = 0$ **VRAI** ☐ **FAUX** ☐
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} 3xe^{x^2+1} = -\infty$ **VRAI** ☐ **FAUX** ☐
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3xe^{x^2+1} = +\infty$ **VRAI** ☐ **FAUX** ☐
5. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{\cos(3n+5)}{n^2}$; cette suite n'a pas de limite. **VRAI** ☐ **FAUX** ☐
6. Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2+1)$, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de ses tangentes sur $]-1;1[$. **VRAI** ☐ **FAUX** ☐
7. Soit n un entier naturel, $5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0{,}1$ pour tout entier n inférieur ou égal à 10. **VRAI** ☐ **FAUX** ☐
8. Soit $f(x) = 2xln\,(5-x)$, on a alors $f'(x) = \frac{-2}{5-x}$ **VRAI** ☐ **FAUX** ☐
9. Soit la fonction g définie et continue sur l'intervalle $[-5;5]$. On a $g(-5) = -1; g(0) = -5\ et\ g(5) = -1.$ L'équation $g(x) = -2$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-5;5]$. **VRAI** ☐ **FAUX** ☐