DS Nº5 _ ENTRAÎNEMENT _ éléments de correction	Term. spé

EXERCICE 1:

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.

Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

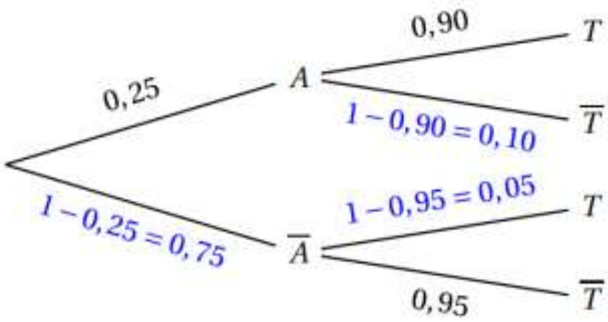
Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.

On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. On résume la situation par un arbre pondéré.



$P(A\cap T)=P(A)\times P_A(T)=0,25\times 0,90=0,225$

2. D'après la formule des probabilités totales :

$P(T)=P(A\cap T)+P\left(\overline{A}\cap T\right)=0,225+0,75\times 0,05=0,2625$

3. On choisit un patient ayant un test positif. La probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques est :

$P_T(A)=\dfrac{P(A\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,225}{0,2625}\approx 0,8571$

4. **a.** Les évènements correspondant à un résultat erroné du test sont : $\overline{A}\cap T$ et $A\cap\overline{T}$.

b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».

$P(E)=P\left(\overline{A}\cap T\right)+P\left(A\cap\overline{T}\right)=0,25\times 0,10+0,75\times 0,05=0,0625$

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés. On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.

a. On a une répétition de 50 épreuves indépendantes et identiques n'ayant que deux issues et dont le succès a pour probabilité $p = 0{,}0625$; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}0625$.

b. $P(X = 7) = \binom{50}{7} \times 0{,}0625^7 \times (1 - 0{,}0625)^{50-7} \approx 0{,}0237$

c. La probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné est :

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{50}{0} \times 0{,}0625^0 \times (1 - 0{,}0625)^{50} \approx 0{,}9603$

2. On cherche la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à 0,95.

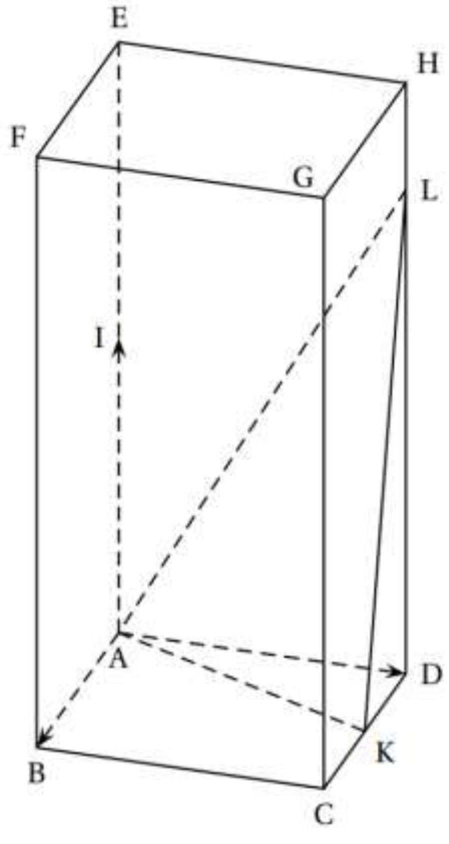
$P(X \geqslant 10) > 0{,}95 \iff P(X < 10) \leqslant 0{,}05 \iff P(X \leqslant 9) \leqslant 0{,}05$

À la calculatrice, par essais successifs, on trouve :

- pour $n = 247$, $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}0514$;
- pour $n = 248$, $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}0498$.

Il faut donc un échantillon de taille au moins 248 pour que $P(X \geqslant 10) \geqslant 0{,}95$.

EXERCICE 2:



1. Avec $C(1;1;0)$ et $D(0;1;0)$, on obtient $K\left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$, donc $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$ et on a $\overrightarrow{AL}\left(0 ; 1 ; \frac{3}{2}\right)$

2. **a.**
- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AK} = 3 - 3 + 0 = 0$;
- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AL} = 0 - 3 + 3 = 0$: le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan AKL, il est donc orthogonal à ce plan; c'est donc un vecteur normal à ce plan.

b. On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathrm{AKL}) \iff \overrightarrow{\mathrm{A}M} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff 6x - 3y + 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$ et comme A appartient à ce plan on a : $0 + 0 + 0 + d = 0$.

Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathrm{AKL}) \iff 6x - 3y + 2z = 0$.

c. La droite Δ contient D et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, donc :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\mathrm{D}M} = t\,\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6t \\ y-1 & = & -3t \\ z & = & 2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R} \iff$

$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 6t \\ y & = & 1-3t \\ z & = & 2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

d. Le point N est donc le point commun au plan (AKL) et à la droite Δ, donc ses coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient le système :

$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 6t \\ y & = & 1-3t \\ z & = & 2t \\ 6x-3y+2z=0 & & \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R} \Rightarrow 6 \times 6t + (-3) \times (1-3t) + 2 \times 2t = 0 \iff$

$36t - 3 + 9t + 4t = 0 \iff 49t = 3 \iff t = \dfrac{3}{49}$; en remplaçant dans les trois premières équations du système, on obtient :

$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 6 \times \dfrac{3}{49} \\ y & = & 1 - 3 \times \dfrac{3}{49} \\ z & = & 2 \times \dfrac{3}{49} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcc} x & = & \dfrac{18}{49} \\ y & = & \dfrac{40}{49} \\ z & = & \dfrac{6}{49} \end{array}\right.$. Conclusion : $\mathrm{N}\left(\dfrac{18}{49}\,;\,\dfrac{40}{49}\,;\,\dfrac{6}{49}\right)$.

3. **a.** Le triangle ADK est rectangle en D; on a par définition AD = 1 et DK = $\frac{1}{2}$.

Donc $\mathcal{A}(\mathrm{ADK}) = \dfrac{\mathrm{AD} \times \mathrm{DK}}{2} = \frac{1}{4}$.

D'autre part DL = $\frac{3}{2}$, donc

$\mathcal{V}(\mathrm{ADKL}) = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{8}$.

b. On a $\overrightarrow{\mathrm{DN}}\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{40}{49} - 1\,;\,\dfrac{6}{49}\right)$, soit $\overrightarrow{\mathrm{DN}}\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{-9}{49}\,;\,\frac{6}{49}\right)$, donc :

$\mathrm{DN}^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{-9}{49}\right)^2 + \left(\frac{6}{49}\right)^2 = \frac{18^2+9^2+6^2}{49^2} = \frac{324+81+36}{49^2} = \frac{441}{49^2} = \frac{21^2}{49^2} = \left(\frac{21}{49}\right)^2$.

Donc $\mathrm{DN} = \dfrac{21}{49} = \dfrac{3}{7}$.

c. En prenant comme base le triangle AKL, on a :

$\mathcal{V}(\mathrm{ADKL}) = \dfrac{\mathcal{A}(\mathrm{AKL}) \times \mathrm{DN}}{3}$, soit $\dfrac{1}{8} = \dfrac{\mathcal{A}(\mathrm{AKL}) \times \frac{3}{7}}{3}$, d'où

$\mathcal{A}(\mathrm{AKL}) = 7 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$ (u. a.).

EXERCICE 3: VRAI/FAUX justifier

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\ln(x^2-1)}{x-1} = -\infty$ **VRAI ☒ FAUX ☐**

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x-1 = 0^+$
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x^2-1 = 0^+$ or $\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$ donc par composée $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \ln(x^2-1) = -\infty$
Donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\ln(x^2-1)}{x-1} = -\infty$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x-1} = 0$ **VRAI ☒ FAUX ☐**

$$\frac{\ln(x^2-1)}{x-1} = \frac{\ln((x+1)(x-1))}{x-1} = \frac{\ln(x+1)+\ln(x-1)}{x-1} = \frac{\ln(x+1)}{x-1} + \frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ par croissance comparée donc par composée $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = 0$

$$\frac{\ln(x+1)}{x-1} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x-1} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

De la même façon que précédemment on montre par composée que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc par somme et quotient on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1$ d'où par produit

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x-1} = 0$$

Donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x-1} = 0$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} 3xe^{x^2+1} = -\infty$ **VRAI ☐ FAUX ☒**

$3xe^{x^2+1} = 3xe^{x^2} \times e$
Or $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x^2} = 0$ par croissance comparée
Donc par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} 3xe^{x^2+1} = 0$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3xe^{x^2+1} = +\infty$ **VRAI ☒ FAUX ☐**

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3 = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2+1 = +\infty$ rt $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc par composée $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2+1} = +\infty$
Donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} 3xe^{x^2+1} = +\infty$

5. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{\cos(3n+5)}{n^2}$; cette suite n'a pas de limite. **VRAI ☐ FAUX ☒**

Pour tout $n \in N, -1 \leq \cos(3n+5) \leq 1$
Donc $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos(3n+5)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
Donc d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge et sa limite est la même que celle de la suite $v_n = -\frac{1}{n^2}$ et $w_n = \frac{1}{n^2}$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\cos(3n+5)}{n^2} = 0$

6. Soit la fonction $f: x \mapsto \ln(x^2+1)$, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de ses tangentes sur $]-1;1[$. **VRAI ☒** **FAUX ☐**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad et\ f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

Puisque $x^2+1 > 0$ pour toiut $x \in R$, le signe de $f''(x)$ ne dépend que de celui de $-2x^2+2 = 2(1-x^2) =$

$$= 2(1-x)(1+x)$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $(1-x)(1+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Car le signe du coefficient de x^2 est négatif.
Sur $]-1;1[$, $f''(x) > 0$ la fonction est donc convexe, ce qui signifie que sa courbe représentative est au-dessus de toutes ces tangentes sur cet intervalle.

7. Soit n un entier naturel, $5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0{,}1$ pour tout entier n inférieur ou égal à 10. **VRAI ☐** **FAUX ☒**

$5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0{,}1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq \frac{0{,}1}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0{,}02 \Leftrightarrow nln\left(\frac{2}{3}\right) \geq \ln 0{,}02$ par croissance de la fonction ln sur R_+^*

$\Leftrightarrow n \leq \frac{\ln 0{,}02}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$ car $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$

Or $\frac{\ln 0{,}02}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 9{,}6$ donc cette inégalité est vraie pour toiut entier $n \leq 9$

8. Soit $f(x) = 2xln\ (5-x)$, on a alors $f'(x) = \frac{-2}{5-x}$ **VRAI ☐** **FAUX ☒**

$$f'(x) = 2\ln(5-x) + 2x \times \frac{-1}{5-x} = 2\ln(5-x) - \frac{2x}{5-x}$$

9. Soit la fonction g définie et continue sur l'intervalle $[-5;5]$. On a $g(-5) = -1; g(0) = -5\ et\ g(5) = -1$.
L'équation $g(x) = -2$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-5;5]$. **VRAI ☐** **FAUX ☒**

On ne peut pas appliquer deux fois le théorème de la bijection sur … $[-1;0]$ et sur $[0;1]$, car on ne sait pas si la fonction $g$est str