Devoir surveillé n°5

Jeudi 16 février

EXERCICE 1 **10 points**

PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de $0,97$.
La probabilité qu'un danger se présente est de $0,01$ et la probabilité que l'alarme s'active est de $0,01465$.
On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'événement « un danger se présente ».
On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. **a.** Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.

   b. En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est $0,005$.
4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.

   Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à $0,01$.

PARTIE B

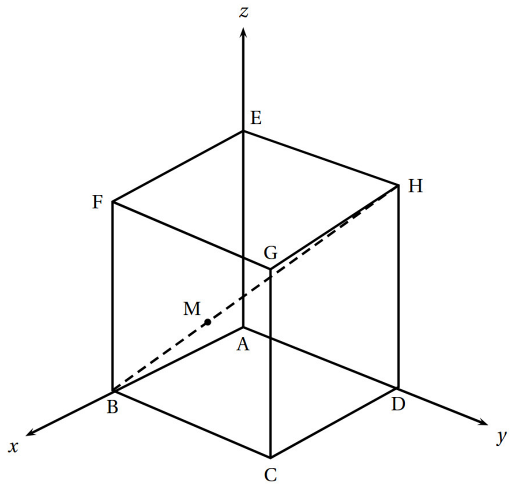
Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que
$P(S) = 0,00525$.
On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.
Les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

1. Donner la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement. On explicitera la formule utilisée.
3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à $0,07$.

EXERCICE 2 **10 points**



Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.

1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.
2. **a.** Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

   b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

   Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.
4. **a.** Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(-1\,;\,1\,;\,1)$ est normal au plan (EGD).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x+y+z-1=0$.

   c. Soit $\mathscr{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.

   Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{2}{3}-t \\ y &=& \dfrac{1}{3}+t \\ z &=& \dfrac{1}{3}+t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :

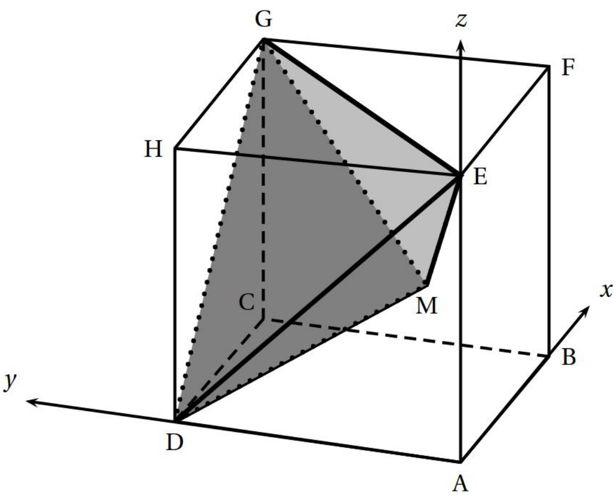
   Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

   a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

   Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

   b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.

   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{b\times h}{3}$ où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.



EXERCICE BONUS **1 point**

Déterminer $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)\ln(x^2-4)$ en détaillant votre raisonnement. Une bonne réponse sans justification ne rapportera aucun point.