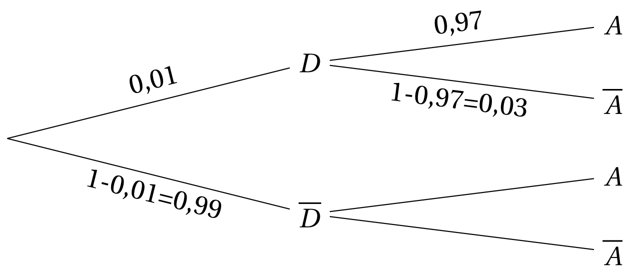
Éléments de correction du DS n°5

EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC - AMÉRIQUE DU SUD 1 - 26 SEPTEMBRE 2022 **10 points**

PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de $0,97$.
La probabilité qu'un danger se présente est de $0,01$ et la probabilité que l'alarme s'active est de $0,014\,65$.
On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'événement « un danger se présente ».
On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.

> **Solution :**
>
> 
>

2. **a.** Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.

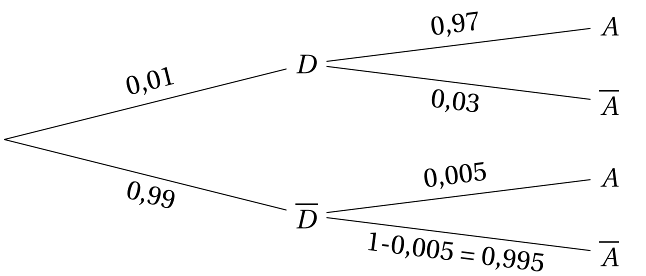
> **Solution :** $P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,01 \times 0,97 = 0,0097$
> La probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active est 0,0097.

b. En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

> **Solution :** On en déduit que la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active est : $P_A(D) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,0097}{0,014\,65} \approx 0,662$.

3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est $0,005$.

> **Solution :** La probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est :
> $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}$. Or, on sait que $P(A) = 0,014\,65$.
>
> D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(D \cap A) + P\left(\overline{D} \cap A\right)$.
>
> On déduit : $P(A) - P(D \cap A) = P\left(\overline{D} \cap A\right)$, donc $P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0,014\,65 - 0,0097 = 0,004\,95$.
>
> Donc $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,00495}{0,99} = 0,005$.
>
> On peut compléter l'arbre :



4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.
Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à $0,01$.

> **Solution :** Cette situation est représentée par les événements $D \cap \overline{A}$ et $\overline{D} \cap A$.
> La probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est donc :
> $P\left(D \cap \overline{A}\right) + P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0,01 \times 0,03 + 0,99 \times 0,005 = 0,00525 < 0,01$.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que
$P(S) = 0,00525$.
On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.
Les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

1. Donner la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.

> **Solution :** Le fait de tirer une alarme au hasard et de vérifier si elle fonctionne ou non est une épreuve de Bernoulli, dont on choisit comme succès : "l'alarme choisie ne fonctionne pas correctement". Le paramètre est donc $p = P(S) = 0,00525$.
> On répète 5 fois cette épreuve de Bernoulli de façon identique et indépendante car dans l'énoncé il est dit que cette répétition est assimilée à un tirage avec remise. La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,00525$.

2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement. On explicitera la formule utilisée.

> **Solution :** La probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement est : $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,00525^1 \times (1 - 0,00525)^{5-1} \approx 0,0257$.

3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

> **Solution :** La probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement est :
> $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \times 0,00525^0 \times (1 - 0,00525)^5 = 0,0260$.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
Déterminer **par le calcul** le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à $0,07$.

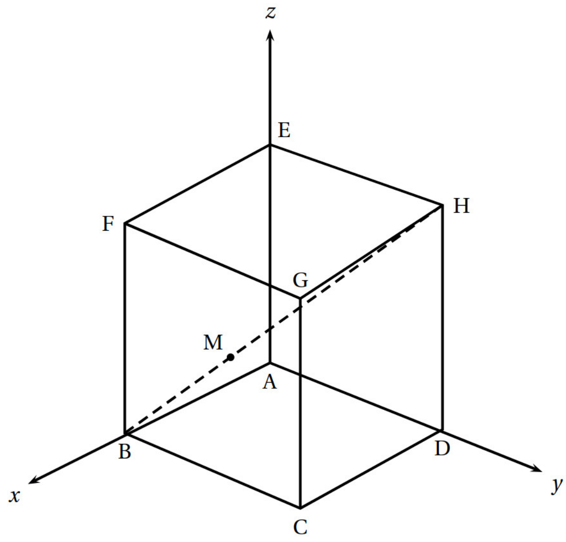
Solution :
Comme dans la partie B, la variable aléatoire Y qui donne le nombre de systèmes d'alarme défectueux suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,00525$.
On cherche n tel que $P(Y \geqslant 1) > 0,07$.
$P(Y \geqslant 1) > 0,07 \iff 1 - P(Y = 0) > 0,07 \iff 0,93 > P(Y = 0)$

$$P(Y = 0) < 0,93 \iff \binom{n}{0} \times 0,00525^0 \times (1 - 0,00525)^n < 0,93 \iff 0,99475^n < 0,93$$
$$\iff \ln\left(0,99475^n\right) < \ln(0,93), \text{ par croissance de la fonction ln sur } \mathbb{R}^{+*}.$$
$$\iff n \ln(0,99475) < \ln(0,93) \iff n > \frac{\ln(0,93)}{\ln(0,99475)}, \text{ car } \ln(0,99475) < 0$$

Or $\dfrac{\ln(0,93)}{\ln(0,99475)} \approx 13,8$, donc il faut prélever au moins 14 systèmes d'alarme pour que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à $0,07$.
Vérification à la calculatrice

- Pour $n = 13$, on trouve $P(Y \geqslant 1) \approx 0,0661 < 0,07$.
- Pour $n = 14$, on trouve $P(Y \geqslant 1) \approx 0,0710 > 0,07$.

EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC - POLYNÉSIE - 2 JUIN 2021



Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.

1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

> **Solution :** Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on a
> $B(1\,;0\,;0),\ \ D(0\,;1\,;0),\ \ E(0\,;0\,;1),\ G(1\,;1\,;1),\ \ H(0\,;1\,;1)$.

2. **a.** Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

> **Solution :** [EG], [GD] et [ED] sont les hypoténuses de triangles rectangles isocèles de côté 1.
> Si on applique le théorème de Pythagore dans un tel triangle (EGH par exemple), on obtient : $EG^2 = EH^2 + GH^2 = 1+1 = 2$, et donc $EG = \sqrt{2}$.
> Ainsi : $EG = GD = ED = \sqrt{2}$: le triangle EGD est équilatéral.

b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

> **Solution :** Puisque $c = \sqrt{2}$, on a $\mathscr{A}(EGD) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ unité d'aire.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$.

> **Solution : Méthode avec les coordonnées :** On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_M-1\\y_M-0\\z_M-0\end{pmatrix}$.
>
> On a donc : $x_M = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$; $y_M = \dfrac{1}{3}$; $z_M = \dfrac{1}{3}$, d'où : M a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$.
>
> **Méthode vectorielle :** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH})$
>
> $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}$
>
> d'où : M a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$ dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

4. **a.** Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(-1\,;\,1\,;\,1)$ est normal au plan (EGD).

> **Solution :** On a $\overrightarrow{\mathrm{EG}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$: donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}} = -1+1+0=0$:
>
> $\overrightarrow{\mathrm{ED}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$: donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}} = 0+1-1=0$.
>
> Conclusion : $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à **deux vecteurs non colinéaires** du plan (EGD) : c'est donc **UN** vecteur normal à ce plan.

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x+y+z-1=0$.

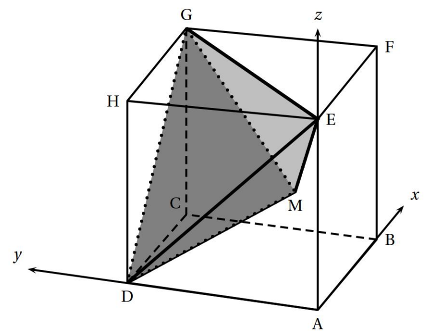
> **Solution :**
> On sait qu'un plan a une équation cartésienne du type $ax+by+cz+d=0$ s'il a un vecteur normal de coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$, donc : (EGD) a pour équation cartésienne : $-x+y+z+d=0$.
> Comme $\mathrm{E}(0;0;1)\in$ (EGD) $\iff -x_E+y_E+z_E+d=0 \iff 0+0+1+d=0 \iff d=-1$.
> Finalement : le plan (EGD) a pour équation cartésienne $-x+y+z-1=0$.

c. Soit $\mathscr{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.
Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{2}{3}-t \\ y & = & \dfrac{1}{3}+t \\ z & = & \dfrac{1}{3}+t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

> **Solution :** La droite $\mathscr{D}$ contient $\mathrm{M}\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}\,(-1\,;\,1\,;\,1)$ vecteur normal au plan (EGD), donc son équation paramétrique est :
>
> $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{2}{3}-1\times t \\ y & = & \frac{1}{3}+1\times t \\ z & = & \frac{1}{3}+1\times t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{2}{3}-t \\ y & = & \frac{1}{3}+t \\ z & = & \frac{1}{3}+t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}.$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :
Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.



a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

Solution : On a vu que la droite $\mathscr{D}$ contient M et est perpendiculaire au plan (EBD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M. Le pied de cette hauteur K appartient donc à $\mathscr{D}$ et au plan (EGD) ; ses coordonnées vérifient donc le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{2}{3}-t \\ y & = & \frac{1}{3}+t \\ z & = & \frac{1}{3}+t \\ -x+y+z-1 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow -\left(\tfrac{2}{3}-t\right)+\tfrac{1}{3}+t+\tfrac{1}{3}+t-1=0 \iff 3t=1 \iff t=\tfrac{1}{3}.$$

En remplaçant t par $\frac{1}{3}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \\ y & = & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \\ z & = & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Conclusion : K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$V=\dfrac{b\times h}{3}$ *où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.*

Solution : On en déduit $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

D'où $KM=\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}}=\sqrt{\dfrac{3}{9}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Comme $\mathscr{A}(\text{EGD})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, le volume de la pyramide GEDM est : $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{3}=\dfrac{1}{6}$.

EXERCICE BONUS — 1 point

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to2^+}(x-2)\ln(x^2-4)$ en détaillant votre raisonnement. Une bonne réponse sans justification ne rapportera aucun point.

Solution : $(x-2)\ln(x^2-4)=(x-2)\ln[(x-2)(x+2)]=(x-2)\ln(x-2)+(x-2)\ln(x+2)$

Or : $\displaystyle\lim_{x\to2^+}x+2=4$, donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to2^+}\ln(x+2)=\ln(4)$, et par somme, $\displaystyle\lim_{x\to2^+}x-2=0$.

Donc par produit : $\displaystyle\lim_{x\to2^+}(x-2)\ln(x+2)=0\times\ln(4)=0$

De plus , comme $\displaystyle\lim_{x\to2^+}x-2=0^+$, en posant $X=x-2$, on sait d'après le théorème des croissances comparées que : $\displaystyle\lim_{x\to2^+}(x-2)\ln(x-2)=\lim_{X\to0^+}(X)\ln(X)=0$.

Donc finalement, par somme : $\displaystyle\lim_{x\to2^+}(x-2)\ln(x^2-4)=\lim_{x\to2^+}(x-2)\ln(x-2)+(x-2)\ln(x+2)=0$.