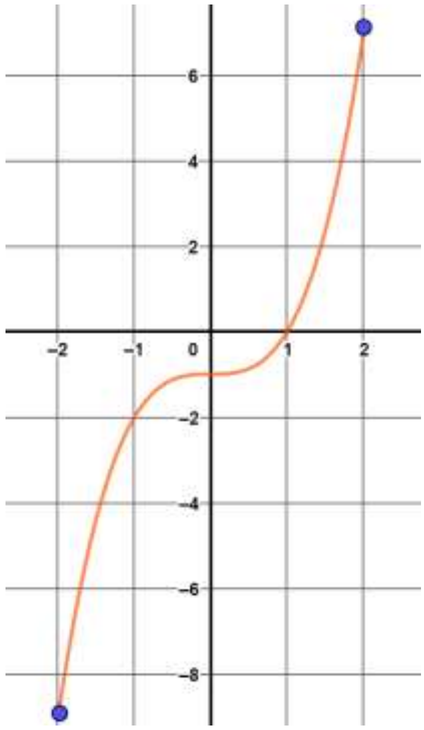
DS4 ENTRAINEMENT _ MATHS	Term. spé

EXERCICE 1 :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2-1}}{x^3} =$
   a. 0^+ b. 0^- c. $+\infty$
2. La suite (u_n) définie par $u_n = -n^2 + \sin n$:
   a. N'a pas de limite b. a pour limite $-\infty$ c. est décroissante
3. Soit g la fonction définie sur [-2 ;2].
   Ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde g''.
   a. g est concave sur $[-2; 0]$
   b. g est concave sur $[-2; 1]$
   c. g' est croissante sur $[-2; 0]$



EXERCICE 2 :

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.
2. **a.** Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.
   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1+3x}{3+x}$. En utilisant la fonction f, déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\frac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	0,99997	1,00001	0,999996	1,000001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

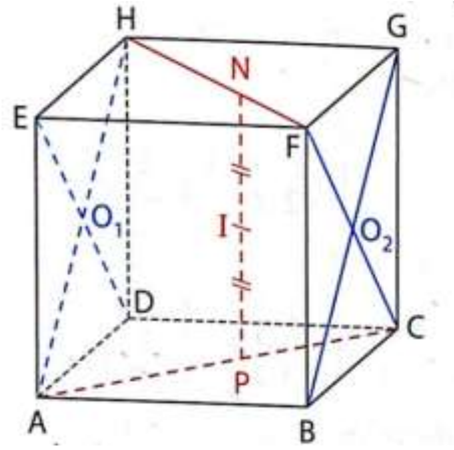
4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b. montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).*

EXERCICE 3 :

ABCDEFGH est un cube. On note O_1 et O_2 les centres respectifs des faces ADHE et BCGF. N est le point du segment [HF] et P le point du segment [AC] définis par $\overrightarrow{HN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. I est le milieu du segment [NP].



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

On se propose de démontrer de deux façons différentes que les points I, O_1 et O_2 sont alignés.

1. **Par un calcul vectoriel**

   a. Démontrer que $\overrightarrow{O_1I} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC})$

Indices :

➔ *vous pouvez partir de $\frac{\overrightarrow{O_1 1}}{2}(\overrightarrow{O_1N} + \overrightarrow{O_1P})$ en ayant au préalable justifié pourquoi*

➔ *ou vous pouvez directement décomposer $\overrightarrow{O_1I}$ à l'aide de la relation de Chasles en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{HF}$*

   b. Démontrer que $\overrightarrow{O_2I} = -\frac{1}{6}(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC})$

Indices : vous pouvez utiliser l'un des deux types de méthodes mentionnées au a).

   c. En déduire que I, O_1 et O_2 sont alignés.

2. **Avec les coordonnées :** on se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

   a. Déterminer les coordonnées des points O_1 et O_2.

   b. Calculer les coordonnées des points N, P puis celles du point I.

   c. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{O_1I}$ *et* $\overrightarrow{O_2I}$.

   d. Terminer la démonstration.

Partie B :

Soit le point K défini par : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (GK).
2. Explique pourquoi $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \,, t \in R \\ z = 3t \end{cases}$ peut-être une représentation paramétrique de la droite (AN) .
3. Déterminer la position des droites (GK) et (AN). S'il y a intersection des droites, il fadra déterminer les coordonnées du point d'intersection.