DS4 ENTRAINEMENT _ MATHS_ corrigé	Term. spé

EXERCICE 1 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2-1}}{x^3} =$

a. 0^+ b. 0^- c. $+\infty$

Solution: c

ERRATUM

$\frac{e^{x^2-1}}{x^3} = \frac{e^{x^2}\times e^{-1}}{x^3} = \frac{e^{x^2}}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} \times e^{-1}$ **On a alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X^{\frac{3}{2}}} = 0$ **par croissance comparée mais ici c'est** HORS PROGRAMME car l'exposant n'est pas entier.

donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2-1}}{x^3} = +\infty$

REMARQUE : afin que vous ne vous retrouviez pas avec un énoncé Hors Programme, vous auriez dû avoir :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x-1}}{x^3}$

Et la solution aurait été celle qui vous avait été proposée par erreur:

$\frac{e^{2x-1}}{x^3} = \frac{e^x \times e^{x-1}}{x^3} = \frac{e^x}{x^3} \times e^{x-1}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$; donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2-1}}{x^3} = +\infty$

2. La suite (u_n) définie par $u_n = -n^2 + \sin n$:

a. N'a pas de limite b. a pour limite $-\infty$ c. est décroissante

Solutions : b et c

- Pour tout $n \in N$; $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $-n^2 - 1 \leq u_n \leq -n^2 + 1$

Soit $v_n = -n^2 + 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

- On pose $f(x) = -x^2 + \sin x$

  $f'(x) = -2x + \cos x$

  Or pour tout $x \in R_+$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ et pour tout $x \geq 1$; $on\ a - 2x \leq -2$

  d'où $-2x + \cos x \leq -2 + 1 \leq 0$

  Puisque $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 1$, la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est elle aussi décroissante à partir de $n = 1$. Comme $u_0 = 0\ et\ u_1 = -1 + \sin 1 < 0$, on a en fait (u_n) décroissante pour tout $n \in N$.

Remarque *: l'étude du sens de variation de f pour trouver le sens de variation de (u_n) est ici possible car nous avons une expression explicite de (u_n), avec une expression par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), le sens de variation de f n'indiquerait pas celui de (u_n).*

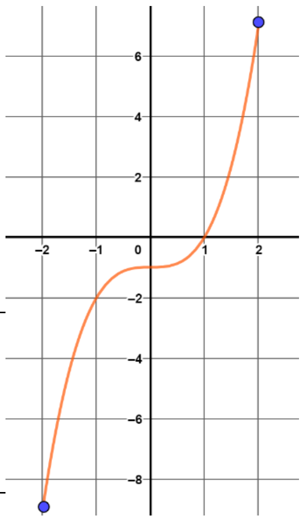
3. Soit g la fonction définie sur [-2 ;2].

Ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde g''.

a. g est concave sur $[-2; 0]$

b. g est concave sur $[-2; 1]$

c. g' est croissante sur $[-2; 0]$



Solutions : a et b

La fonction g est concave lorsque $g''(x) \leq 0$ soit sur $[-2; 1]$.

Si g est concave sur $[-2; 1]$ elle est notamment concave sur $[-2; 0]$.

Pour que g' soit croissante, il faut que sa dérivée g'' soit positive,

ce qui n'est pas le cas sur $[-2; 0]$. (https://www.geogebra.org/classic/n7ymeyrh)

EXERCICE 2 :

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

Solution :

Soit $(P(n): \{u_n > 1\}$

- Initialisation : $u_0 = 2 > 1$, la propriété $P(0)$ est donc vraie.
- Hérédité : on suppose qu'il existe un entier k tel que $P(k)$ vraie, c'est-à-dire $u_k > 1$ et montrons que $P(k+1)$ vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} > 1$.

$$u_{k+1} - 1 = \frac{1+3u_k}{3+u_k} - 1 = \frac{1+3u_k - 3 - u_k}{3+u_k} = \frac{-2+2u_k}{3+u_k} = \frac{2(u_k-1)}{3+u_k}$$

Or $u_k > 1$ soit $u_k - 1 > 0$ et comme $u_k > 1$ alors $3 + u_k > 4 > 0$; par conséquent $u_{k+1} - 1 > 0$ comme produit et quotient de facteurs positifs. D'où $u_{k+1} > 1$. La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

Remarque : on pourrait aussi faire cette partie hérédité en introduisant la fonction f définie par $f(x) = \frac{1+3x}{3+x}$. On montre qu'elle est croissante sur R_+.

Si on suppose $u_k > 1$ slors $f(u_k) > f(1)$ car f croissante sur R_+ et $f(1) = 1$, on démontre bien ainsi que $u_{k+1} > 1$.

- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire à partir de tout rang, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n, u_n > 1$.

2. a. Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

Solution :

Quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \dfrac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{1-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

En déduire que la suite (u_n) converge.

Solution :

On sait que quel que soit le naturel n, $u_n > 1 \Rightarrow u_n^2 > 1^2 \Rightarrow 1 - u_n^2 < 0$ et comme $3 + u_n > 0$

et finalement $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers une limite supérieure ou égale à 1.

D'après le théorème de convergence monotone.

3. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1+3x}{3+x}$. En utilisant la fonction f, déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution :

- $u_{n+1} = f(u_n)$
- (u_n) converge vers un réel l, d'après 2b)
- La fonction f est continue sur R_+ comme quotient de fonctions polynômes qui sont continues sur R et dont le dénominateur ne s'annule pas sur R_+.

On a donc d'après le théorème du point fixe, que la suite (u_n) converge vers l solution de l'équation $f(x) = x$.

Résolution de $f(x) = x$:

$$\frac{1+3x}{3+x} = x \Leftrightarrow x(3+x) = 1+3x \; avec \; x \neq -3$$
$$3x + x^2 = 1 + 3x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$
$$Or \; l \geq 1 \;\; donc \; l = 1$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

Solution :

i	1	2	3
u	0,800	1,077	0,976

Il s'agit simplement de calculer les 1ers termes de la suite.

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	0,99997	1,00001	0,999996	1,000001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

Solution :

Il semble que la suite converge vers 1 par valeurs alternativement supérieures et inférieures.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

Solution :

$$V_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - 1}{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} + 1} = \frac{0,5-0,5u_n}{1,5+1,5u_n} = \frac{-0,5\,(u_n-1)}{1,5\,(u_n+1)} = -\frac{1}{3}v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

Solution :

On a $v_0 = \dfrac{2-1}{2+3} = \dfrac{1}{3}$.

On sait qu'alors pour tout naturel n, $v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

Solution :

Quel que soit le naturel n, $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 1$, donc $v_n \leqslant \dfrac{1}{3}$ et par conséquent $v_n \neq 1$.

b. montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

Solution :

$v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} \iff v_n(u_n+1) = u_n - 1 \iff v_n u_n + v_n = u_n - 1 \iff$

$v_n u_n - u_n + = -1 - v_n \iff u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$ et comme $v_n \neq 1$,

$u_n = \dfrac{-1-v_n}{v_n - 1} = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

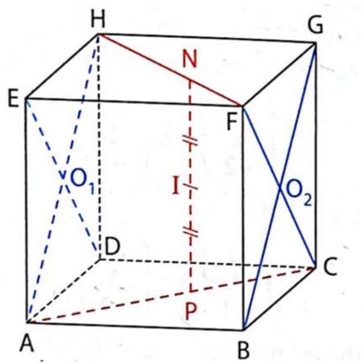
c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution :

Comme $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, donc d'après le résultat précédent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1} = 1$.

<u>EXERCICE 3 :</u>

ABCDEFGH est un cube. On note O_1 et O_2 les centres respectifs des faces ADHE et BCGF. N est le point du segment [HF] et P le point du segment [AC] définis par $\overrightarrow{HN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. I est le milieu du segment [NP].



Les parties A et B sont indépendantes.

<u>Partie A :</u>

On se propose de démontrer de deux façons différentes que les points I, O_1 et O_2 sont alignés.

1. Par un calcul vectoriel

a. Démontrer que $\overrightarrow{O_1I} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC})$

Solution :

Puisque I milieu de [NP], on a alors $\overrightarrow{O_1I} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1N} + \overrightarrow{O_1P})$ d'après la règle du parallélogramme.

$$\overrightarrow{O_1I} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1H} + \overrightarrow{HN} + \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{AP}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{HF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC})$$

b. Démontrer que $\overrightarrow{O_2I} = -\frac{1}{6}(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC})$

Solution :

Puisque I milieu de [NP], on a alors : $\overrightarrow{O_2I} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2N} + \overrightarrow{O_2P})$ d'après la règle du parallélogramme.

$$\overrightarrow{O_2I} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2F} + \overrightarrow{FN} + \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{CP}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{HF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{6}\,(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC})$$

c. En déduire que I, O_1 et O_2 sont alignés.

Solution :

Puisque $\overrightarrow{O_1I} = -2\overrightarrow{O_2I}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{O_1I}$ et $\overrightarrow{O_2I}$ sont colinéaires, comme ils ont le point I en commun, cela signifie que les points $O_1, I\ et\ O_2$ sont alignés.

2. Avec les coordonnées : on se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

a. Déterminer les coordonnées des points O_1 et O_2.

Solution :

$$O_1\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\ \ et\ O_2\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

b. Calculer les coordonnées des points N, P puis celles du point I.

Solution :

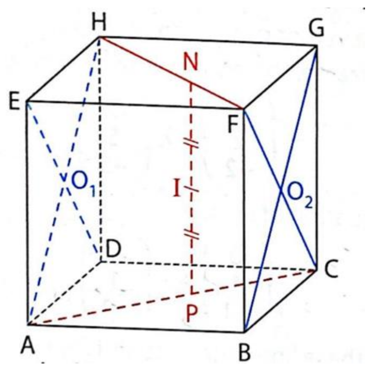
$H(0;1;1) et\ F(1;0;1)$.

Posons $N(x;y;z)$ on a alors $\overrightarrow{HN}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

Puisque $\overrightarrow{HN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HF}$ on a alors : $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y - 1 = -\frac{2}{3} \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases}$ $donc\ N\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1\right)$

De la même façon on montre que $P\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$.

I milieu de [NP] donc $I\left(\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{2}; \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{2}; \frac{1+0}{2}\right)$ $soit\ I\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.



c. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{O_1I}\ et\ \overrightarrow{O_2I}$.

Solution :

$$\overrightarrow{O_1I}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} - 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{O_2I}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} - 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d. Terminer la démonstration.

Solution :

D'après les coordonnées, on a donc bien : $\overrightarrow{O_1I} = -2\overrightarrow{O_2I}$, cela signifie que les points $O_1, I\ et\ O_2$ sont alignés (cf. 1.c)

Partie B :

Soit le point K défini par : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (GK).

Solution :

Puisque $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE}$; alors le point K a pour coordonnées dans le repère mentionné à la question 2 : $K(1;-1;3)$.

Un vecteur directeur de la droite (GK) est le vecteur $\overrightarrow{GK}\begin{pmatrix}1-1\\-1-1\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$ sachant que $G(1;1;1)$.

Une représentation paramétrique de (GK) est alors :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2k \, , k \in R \\ z = 1 + 2k \end{cases}$$

2. Explique pourquoi $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \, , t \in R \\ z = 3t \end{cases}$ peut-être une représentation paramétrique de la droite (AN).

Solution :

Le point A a pour coordonnées (0 ;0 ;0).

Un vecteur directeur de (AN) peut être le vecteur $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$ mais on peut prendre aussi $3\overrightarrow{AN}$ comme vecteur directeur, qui aura alors pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique est alors :

$\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + 1t \, ; t \in R \\ z = 0 + 3t \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \, , t \in R \\ z = 3t \end{cases}$

3. Déterminer la position des droites (GK) et (AN). S'il y a intersection des droites, il faudra déterminer les coordonnées du point d'intersection.

Solution :

Les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ *et* $\overrightarrow{GK}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

Cherchons à déterminer si les droites sont sécantes :

$$\begin{cases} 1 = 2t \\ 1 - 2k = t \\ 1 + 2k = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ 2k = \frac{1}{2} \\ 2k = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Le système ayant une solution., cela signifie que les droites sont donc sécantes et que leur point d'intersection Z a pour coordonnées $\left(1;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.