Devoir surveillé n°4

Jeudi 5 janvier

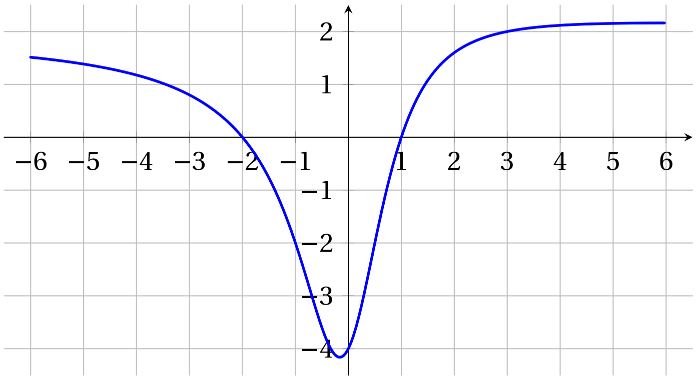
EXERCICE 1 **3 points**

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des affirmations proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. Soit (u_n), la suite définie par : $u_n = \dfrac{\cos(3n+1)-1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite :

- **a.** n'a pas de limite
- **b.** a pour limite -1
- **c.** a pour limite 0^+
- **d.** a pour limite 0^-

2. Soit une fonction f définie et dérivable sur $[-6; 6]$. La courbe représentative de sa **fonction dérivée** f' est représentée ci-contre.



La fonction f est concave sur :

- **a.** $[-6; -2[$ et sur $]1; 6]$
- **b.** $]-2; 1[$.
- **c.** $[-6; -0,17[$
- **d.** $[-6; -1[$ et sur $]0,5; 6]$

3. Soit la fonction g définie par $g(x) = (1-x^2)\,\mathrm{e}^{x+1}$:

- **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0^-$
- **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0^+$
- **c.** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$
- **d.** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

EXERCICE 2 **10,5 points**

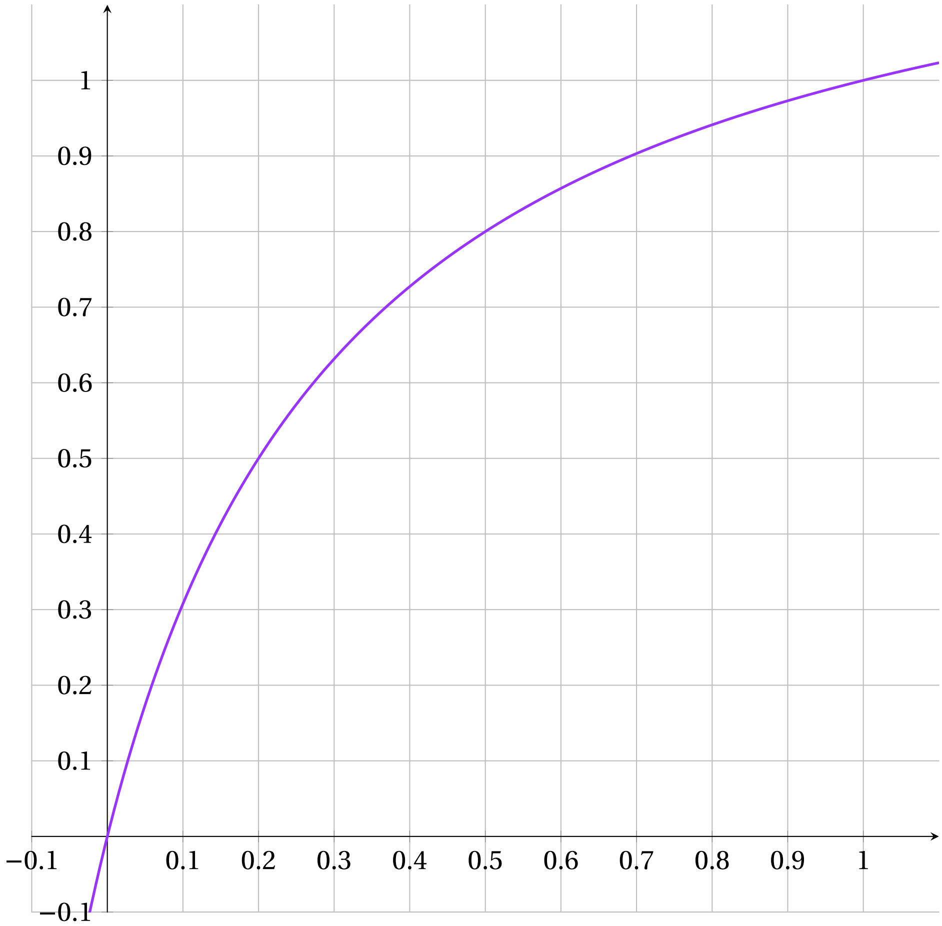
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **a.** Calculer u_1.

   b. Construire les 3 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses du graphique ci-dessous :



2. **a.** Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   d. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

3. **a.** Compléter directement sur le sujet la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while ............................
        u = ............................
        n = n + 1
    return n
```

b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

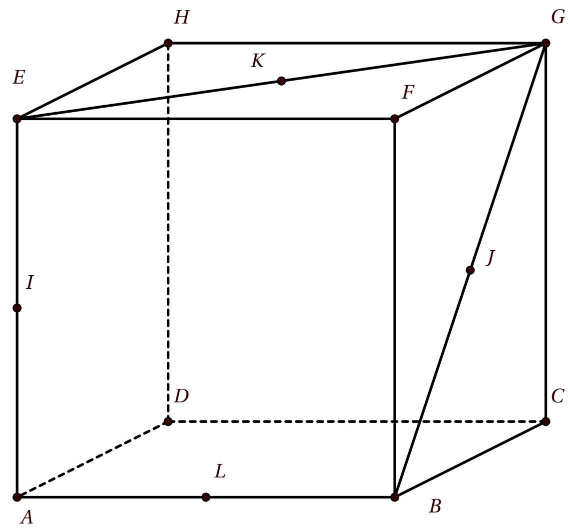
b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$.

c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 **6,5 points**



ABCDEFGH est un cube représenté ci-contre.
Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AE]$, $[BG]$, $[EG]$ et $[AB]$.
On se propose de montrer de deux façons différentes que les points I, K, J et L sont coplanaires.

Première méthode : avec des vecteurs

Dans cette partie vous ne pouvez pas utiliser de coordonnées de point ni de vecteur.

On note M le milieu du segment $[IJ]$, on a alors $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{0}$.

1. **a.** Démontrer que M est aussi le milieu de $[KL]$, soit que $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{0}$.

b. En déduire que les points I, K, J et L sont coplanaires.

Deuxième méthode : avec des coordonnées

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

2. **a.** Déterminer les coordonnées de I, J, K et L.

b. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$.

c. Démontrer que les points I, K, J et L sont coplanaires.

3. Soit le point N défini par : $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE}$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AN).

b. Une représentation paramétrique de la droite (KJ) est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y & = & \frac{1}{2} \\ z & = & 1 - \frac{1}{2}t \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}$

Montrer que les droites (AN) et (KJ) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.