Éléments de correction du DS n°4

EXERCICE 1 **3 points**

1. Soit (u_n), la suite définie par : $u_n = \dfrac{\cos(3n+1)-1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite :
   - **a.** n'a pas de limite
   - **b.** a pour limite -1
   - **c.** a pour limite 0^+
   - **d.** a pour limite 0^-

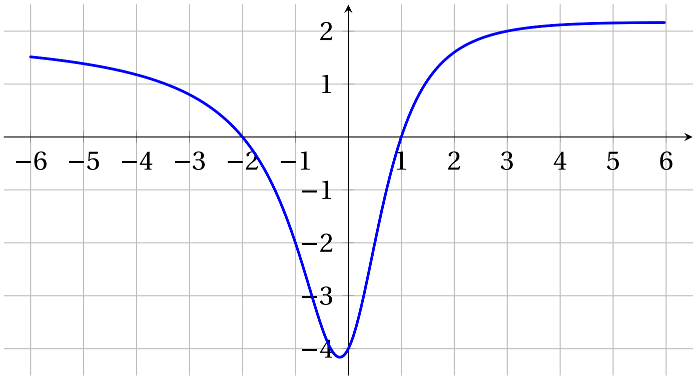
Solution : Réponse d.

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ -1 \leqslant \cos(3n+1) \leqslant 1 \Longleftrightarrow -2 \leqslant \cos(3n+1)-1 \leqslant 0 \Longleftrightarrow -2 \leqslant \cos(3n+1)-1 \leqslant 0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{-2}{n^2} \leqslant \frac{\cos(3n+1)-1}{n^2} \leqslant \frac{0}{n^2} \Longleftrightarrow \frac{-2}{n^2} \leqslant \frac{\cos(3n+1)-1}{n^2} \leqslant 0$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(3n+1)-1}{n^2} = 0$.

De plus, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{\cos(3n+1)-1}{n^2} \leqslant 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(3n+1)-1}{n^2} = 0^-$.

2. Soit une fonction f définie et dérivable sur $[-6;6]$. La courbe représentative de sa **fonction dérivée** f' est représentée ci-contre.



   La fonction f est concave sur :
   - **a.** $[-6;-2[$ et sur $]1;6]$
   - **b.** $]-2;1[$.
   - **c.** $[-6;-0,17[$
   - **d.** $[-6;-1[$ et sur $]0,5;6]$

Solution : Réponse c.
La courbe représentative donnée étant celle de la fonction dérivée de f, on utilise le fait que la fonction f est concave sur un intervalle si et seulement si sa dérivée est décroissante sur cet intervalle.
Parmi les intervalles proposés, celui qui correspond à l'intervalle où la fonction f' est décroissante est $[-6;-0,17[$.

3. Soit la fonction g définie par $g(x) = (1-x^2)\,\mathrm{e}^{x+1}$:
   - **a.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0^-$
   - **b.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0^+$
   - **c.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$
   - **d.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

Solution : Réponse a.
$g(x) = (1-x^2)\,\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^{x+1} - x^2\,\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^{x+1} - x^2\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{1}$.
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x+1} = 0$ et par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^{x} = 0$, donc par produit $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{1} = 0$.
Enfin, par somme, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < -1 \Longrightarrow 1-x^2 < 0 \Longrightarrow (1-x^2)\,\mathrm{e}^{x+1} < 0 \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0^-$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

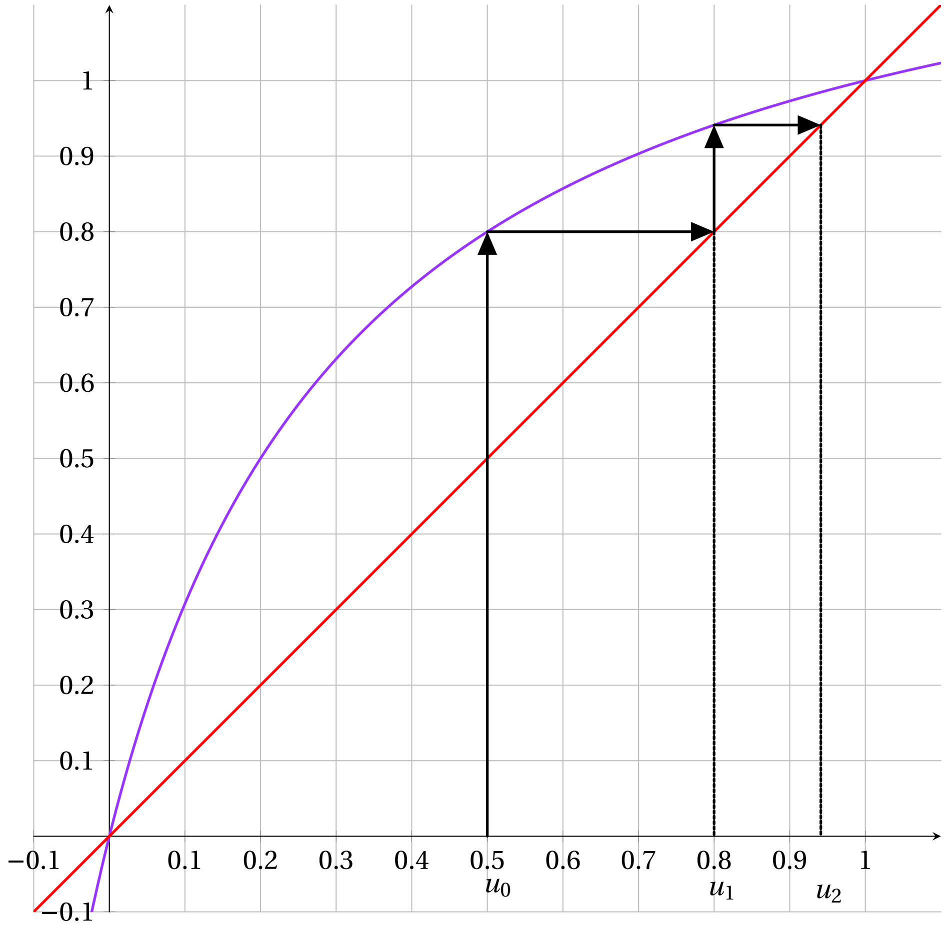
On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **a.** Calculer u_1.

Solution : On a donc pour $n = 0$, $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$.

b. Construire les 3 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses du graphique ci-dessous :

Solution :



2. **a.** Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

Solution : $\forall x \in \left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$: $f'(x) = \frac{4(1+3x) - 4x \times 3}{(1+3x)^2} = \frac{4+12x-12x}{(1+3x)^2} = \frac{4}{(1+3x)^2} > 0.$

Donc la fonction f est donc croissante sur $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

Solution : Soit $\mathscr{P}(n)$ l'inégalité triple : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

- **Initialisation** : on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$; de plus $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{4}{5} \leqslant 2$, donc :
  $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : On suppose qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$.
  Montrons alors que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2$.
  En utilisant l'hypothèse de récurrence et la croissance de la fonction f on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 2 &\Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(2) \\
&\Longleftrightarrow \frac{4}{5} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \frac{8}{7} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2
\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Solution : La suite (u_n) est croissante et elle majorée par 2, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ telle que : $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 2$.

d. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Solution : On a :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_{n+1}$.
  (u_n) converge vers une limite finie ℓ telle que $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 2$.
- la fonction f est continue sur $\left]-\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ car le quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Résolvons-la :

$$f(\ell) = \ell \Longleftrightarrow \frac{4\ell}{1+3\ell} = \ell \Longleftrightarrow 4\ell = \ell(1+3\ell) \Longleftrightarrow 0 = \ell(1+3\ell-4)$$

$$\Longleftrightarrow \ell(3\ell-3) = 0 \Longleftrightarrow 3\ell(\ell-1) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} \ell & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell - 1 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} \ell & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell & = & 1 \end{array}\right.$$

Comme $\ell \geqslant \frac{1}{2}$, la seule solution possible est 1 ; la suite (u_n) converge vers 1.

3. **a.** Compléter directement sur le sujet la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

Solution :

```
def seuil(E) :
  u = 0,5
  n = 0
  while 1 − u >= E
    u = 4 ∗ u/(1 + 3 ∗ u)
    n = n + 1
  return n
```

b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.

Solution : On obtient $u_6 \approx 0{,}99975$, donc $1 - u_6 > 10^{-4}$ et $u_7 \approx 0{,}999939$, donc $1 - u_7 < 10^{-4}$.
Le programme renvoie donc $n = 7$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

Solution : Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}$ soit en utilisant la définition de u_{n+1} :

$v_{n+1} = \dfrac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1 - \frac{4u_n}{1+3u_n}}$ soit en multipliant chaque terme par $1 + 3u_n$:

$v_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1 + 3u_n - 4u_n} = \dfrac{4u_n}{1 - u_n} = 4\dfrac{u_n}{1 - u_n} = 4v_n$.

L'égalité, vraie pour tout naturel n, $v_{n+1} = 4v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 4$, de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1 - u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

On sait qu'alors , pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 4^n = 4^n$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$.

Solution : Quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n} \iff v_n(1 - u_n) = u_n \iff v_n - u_n v_n = u_n \iff v_n = u_n v_n + u_n \iff v_n = u_n(v_n + 1)$.

Comme $v_n = 4^n$, $v_n \geqslant 1$, donc $v_n + 1 \geqslant 2$, donc $v_n + 1 \neq 0$ et finalement en multipliant par $\dfrac{1}{v_n + 1}$, on obtient $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

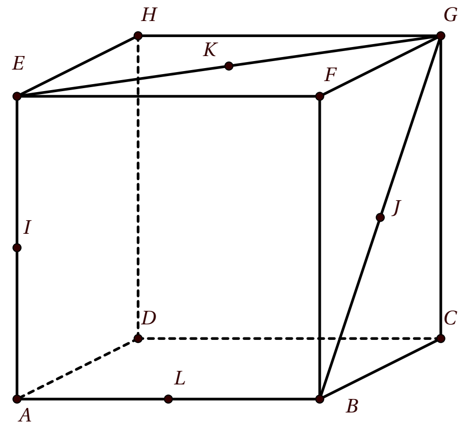
c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1+0,25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

Solution : On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4^n$, d'où en remplaçant dans l'écriture précédente :
$u_n = \dfrac{4^n}{4^n+1}$ et en multipliant par $\dfrac{1}{4^n}$:
$u_n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4^n}}$. Or $\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1^n}{4^n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0,25^n$, d'où $u_n = \dfrac{1}{1+0,25^n}$.
Comme $0 < 0,25 < 1$, on peut dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,25^n = 0$, puis, par somme, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+0,25^n = 1$ et enfin par quotient, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$.

EXERCICE 3 **6,5 points**



ABCDEFGH est un cube représenté ci-contre.
Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AE]$, $[BG]$, $[EG]$ et $[AB]$.
On se propose de montrer de deux façons différentes que les points I, K, J et L sont coplanaires.

Première méthode : avec des vecteurs

Dans cette partie vous ne pouvez pas utiliser de coordonnées de point ni de vecteur.

On note M le milieu du segment $[IJ]$, on a alors $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{0}$.

1. **a.** Démontrer que M est aussi le milieu de $[KL]$, soit que $\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{0}$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{ML} &= \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BL}\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}\right)\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

b. En déduire que les points I, K, J et L sont coplanaires.

Solution : Le point M est à la fois le milieu de $[IJ]$ et de $[KL]$. Cela signifie que $IKJL$ est un parallélogramme, et donc que les 4 points des sommets sont coplanaires.

Deuxième méthode : avec des coordonnées

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\,)$.

2. **a.** Déterminer les coordonnées de I, J, K et L.

Solution : Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\,)$: $I\left(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $J\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ et $L\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$

b. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$.

Solution : On a donc $\overrightarrow{IJ}\left(1-0\,;\,\frac{1}{2}-0\,;\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$, soit $\overrightarrow{IJ}\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

De même, $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2}-0\,;\,\frac{1}{2}-0\,;\,1-\frac{1}{2}\right)$, soit : $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

Et enfin : $\overrightarrow{IL}\left(\frac{1}{2}-0\,;\,0-0\,;\,0-\frac{1}{2}\right)$, soit : $\overrightarrow{IL}\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,-\frac{1}{2}\right)$

c. Démontrer que les points I, K, J et L sont coplanaires.

Solution : Grâce aux coordonnées, on voit que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{IL}$: cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ s'écrit comme combinaison linéaires des vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$. Or, les 3 vecteurs ont le point I en commun, donc les points I, J, K et L sont coplanaires.

3. Soit le point N défini par : $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE}$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AN).

Solution : Comme $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE}$, on en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AN}$: $\overrightarrow{AN}\,(\,3\,;\,2\,;\,3\,)$, et comme on a $A\,(\,0\,;\,0\,;\,0\,)$, une représentation paramétrique possible de la droite (AN) est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3k \\ y &=& 2k \\ z &=& 3k \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{R}$

b. Une représentation paramétrique de la droite (KJ) est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ y &=& \frac{1}{2} \\ z &=& 1-\frac{1}{2}t \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}$

Montrer que les droites (AN) et (KJ) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Solution : Supposons qu'il existe un point P, intersection des deux droites, ses coordonnées vérifient alors les deux représentations paramétriques et on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3k &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ 2k &=& \frac{1}{2} \\ k &=& 1-\frac{1}{2}t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} k &=& \frac{1}{4} \\ 3\times\frac{1}{4} &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ 3\times\frac{1}{4} &=& 1-\frac{1}{2}t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} k &=& \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}t &=& \frac{3}{4}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t &=& 1-\frac{3}{4} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} k &=& \frac{1}{4} \\ t &=& \frac{1}{2} \\ t &=& \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Le système a une solution, donc les droites (AN) et (KJ) sont bien sécantes.

On remplace k par $\frac{1}{4}$ dans l'équation paramétrique de (AN) pour déterminer les coordonnées de P, et on obtient : $P\left(\frac{3}{4}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{4}\right)$