PROPOSITION SUJET ENTRAÎNEMENT DS3

EXERCICE 1:

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour les trois premières questions on considère le cube $ABCDEFGH$ où I *et* J sont les centres respectifs des faces $ADHE$ et $ABCD$ et K le milieu de $[IJ]$:

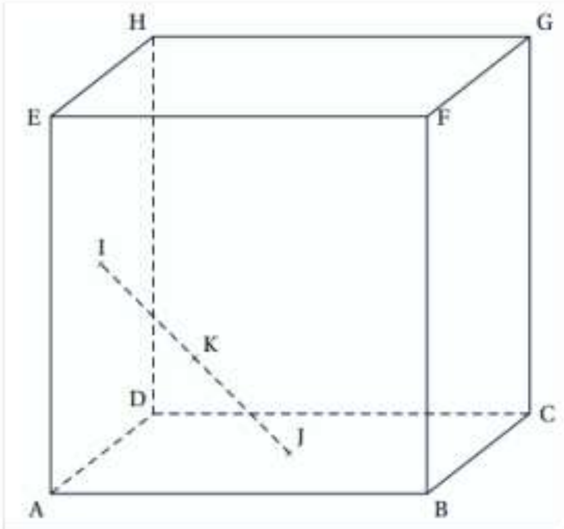
1. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

   a) Les droites (IJ) et (HC) sont parallèles.

   b) Le point K appartient à la droite (DF).

   c) Le point K appartient à la droite (AG).

   d) Les droites (IJ) et (EG) sont sécantes.



2. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

   a) La droite (AK) coupe la face $DCGH$ en G.

   b) Les droites (AK) et (HG) sont non coplanaires.

   c) La droite (AK) et la droite (EC) sont sécantes.

   d) La droite (AK) coupe le segment $[GC]$ en son milieu.

3. L'intersection des plans (IAB) et (IDC) :

   a) est le point I.

   b) est la droite (IG).

   c) est la droite passant par I et parallèle à (AB).

   d) est la droite (IS) où S est le centre de la face $DCGH$.

4. On considère maintenant le cube $ABCDEFGH$, les points I *et* J sont les milieux respectifs des arêtes $[HG]$ et $[FG]$, les points M et N sont les centres respectifs des faces $ABFE$ et $BCGF$.

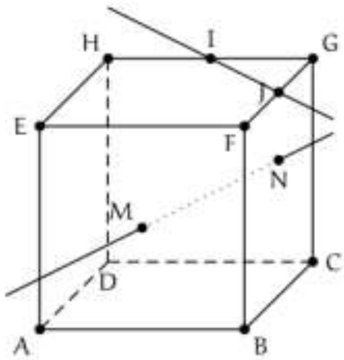
   Les droites (IJ) et (MN) sont :

   a) perpendiculaires.

   b) sécantes, non perpendiculaires.

   c) non coplanaires.

   d) parallèles.



5. Soit $P1, P2$ *et* $P3$ trois plans distincts de l'espace.

   Si les plans $P1$ et $P2$ sont parallèles alors laquelle des situations est possible ?

   a) $P1 \cap P3 = d$ et $P2 \cap P3 = \emptyset$, avec d une droite et $\emptyset$ désignant l'ensemble vide.

   b) $P1 \cap P3 = d$ et $P2 \cap P3 = d'$, avec d *et* d' droites non coplanaires.

   c) $P1 \cap P3 = d$ et $P2 \cap P3 = d'$, avec d *et* d' droites sécantes

   d) $P1 \cap P3 = d$ et $P2 \cap P3 = d'$, avec d *et* d' droites parallèles.

6) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^4-6x^3}{(x-3)^2(x-1)}$, la courbe représentative de f :

a) n'admet pas d'asymptote horizontale

b) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$

c) une asymptote horizontale d'équation $y = 3$

7) On reprend la même fonction que celle de la question 6), sa courbe représentative :

a) n'admet pas d'asymptote verticale

b) admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$

c) admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$

8) Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2} - x^2$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0

9) Soit la fonction f définir sur $R\backslash\{-1\}$ par $f(x) = 5x + 1 - \frac{3}{x+1}$.

a) C_f admet une asymptote horizontale

b) C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$

c) C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = 5x + 1$

d) C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$.

EXERCICE 2 :

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires. On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1. **a.** Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

   b. On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.
   À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

   c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n=0
while ...... :
    u = ......
    n = ......
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 12500$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.

5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12500$, pour tout entier naturel n.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.

   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   c. En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = 12500 - 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4},$$

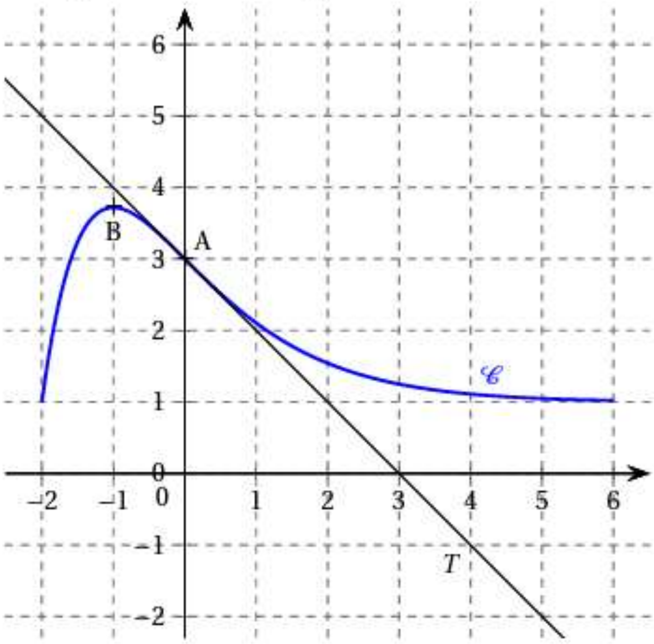
où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000.

EXERCICE 3 :

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[-2\,;6]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.
Le point A de coordonnées $(0\,;3)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-2\,;6]$.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point B d'abscisse -1.



Partie A

En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer $f(0)$.
2. Déterminer $f'(0)$. En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
3. Déterminer le signe de f' sur $[-2\,;6]$.
4. Donner la convexité de f sur $[-2\,;6]$.

Partie B

La fonction f est définie par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x} + 1$ pour tout $x \in [-2\,;6]$.

1. Déterminer la valeur exacte de $f(6)$ puis en donner la valeur arrondie au centième.
2. Montrer que, pour tout $x \in [-2\,;6]$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
3. Étudier le signe de f' sur $[-2\,;6]$ puis donner le tableau des variations de f sur $[-2\,;6]$.

4. On considère maintenant f sur R. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

EXERCICE 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)e^{2x}$ sur R.

1. Dresser le tableau de variation de f, en faisant apparaître les limites en $-\infty$ et $+\infty$ que vous aurez préalablement justifié. Vous interpréterez graphiquement ces limites.
2. **a.** Calculer $f(0)$.
   b. Résoudre $f(x) = 0$.
   c. Quelles interprétation graphique peut-on faire des réponses obtenues en a et b ?

3. Montrer que la droite (d) d'équation $y = -2x + 1$ est tangente à la courbe représentative de f en 0.

4. a. Montrer que $f''(x) = 8e^{2x}(x^2 - 2)$.

b. En déduire la convexité de f.

c. En déduire la position relative de C_f et de (d) sur $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

QUESTION BONUS :

Tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan IJK, avec $I \in [EF]; K \in face\ ABFE\ et\ J \in face\ ADHE$.