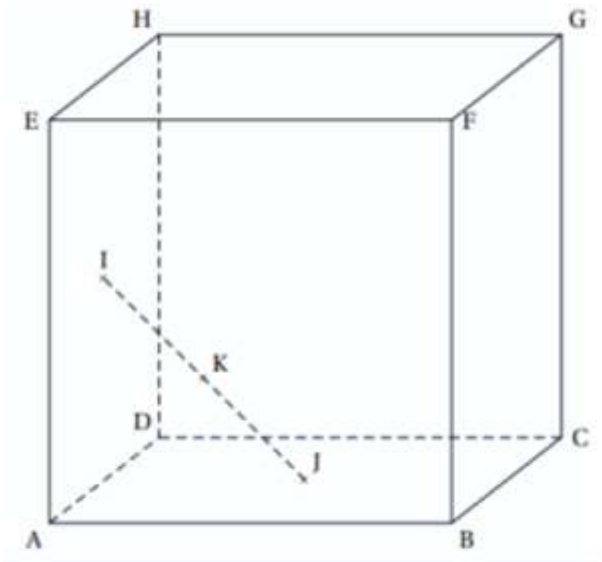
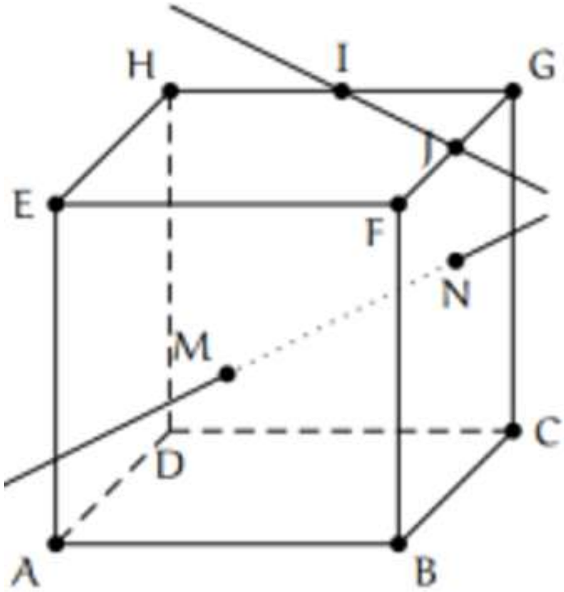
PROPOSITION SUJET ENTRAÎNEMENT DS3_Éléments de correction

EXERCICE 1:





1) **RÉPONSE A)**

Dans le triangle AHC les points I et J sont respectivement les milieux des côtés $[AH]$ et $[AC]$, donc le théorème des milieux (cas particulier de la réciproque de Thalès) affirme que le segment $[IJ]$ est parallèle à $[CH]$ et que sa longueur est la moitié de celle de $[CH]$.

2) **RÉPONSE B)**

Toujours en appliquant Thales dans le triangle AHC. Les droites (AK) et (HC) sont sécantes en un point U. Comme la droite (AK) coupe le plan (HGC) en U et que (AK) n'est pas incluse dans ce plan alors (AK) et (HG) ne sont pas sécantes. Elles ne pas non plus parallèles, donc elles sont non coplanaires.

3) **RÉPONSE C)**

C'est une application du théorème du toit, les plans contiennent les droites (AB) et (CD) qui sont parallèles car la face ABCD est un carré, donc la droite d'intersection est la parallèle à (AB) passant par le point I.

4) **RÉPONSE C)**

Encore avec le théorème des milieux dans le triangle FAC, on prouve que (MN) est parallèle à (AC) ou à (EG) qui est sécante à (IJ). Mais (MN) n'est pas contenue dans le plan (EFG) donc (MN) et (IJ) sont non coplanaires.

5) **RÉPONSE D)**

Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un selon une droite d coupera l'autre selon une droite d' parallèle à d .

6) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^4-6x^3}{(x-3)^2(x-1)}$, la courbe représentative de f :

Réponse : a)

$$f(x) = \frac{x^4\left(2-\frac{6}{x}\right)}{\left(x\left(1-\frac{3}{x}\right)\right)^2 \times x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{x^4\left(2-\frac{6}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)^2 \times x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{x\left(2-\frac{6}{x}\right)}{\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

Or par somme $\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{6}{x} = 2$ donc par produit $\lim_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{6}{x}\right) = +\infty$

Par somme $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{3}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$ donc par produit $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$

D'où par quotient $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Idem en $-\infty$

7) On reprend la même fonction que celle de la question 6), sa courbe représentative :

Réponses : b) et c)

$$f(x) = \frac{2x^3(x-3)}{(x-3)^2(x-1)} = \frac{2x^3}{(x-3)(x-1)}$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $(x-3)(x-1)$		+	0	$-$	0	+	

Or $\lim_{\substack{x\to3\\>}}(x-3)(x-1) = 0^+$ et $\lim_{\substack{x\to3\\<}}(x-3)(x-1) = 0^-$

Et $\lim_{x\to3} 2x^3 = 54$ donc par quotient on a $\lim_{\substack{x\to3\\>}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to3\\<}} f(x) = -\infty$

$\lim_{\substack{x\to1\\<}}(x-1) = 0^-$ *et* $\lim_{\substack{x\to1\\>}}(x-1) = 0^+$ donc par quotient $\lim_{\substack{x\to1\\<}} \frac{1}{x-1} = -\infty$ *et* $\lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{1}{x-1} = +\infty$

$\lim_{x\to1} \frac{2x^3}{x-3} = -1$ donc par produit $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = -\infty$

8) Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2} - x^2$

Réponse : a)

$$g(x) = \frac{e^x}{x^2}\left(\frac{x^2}{(x+1)^2} - \frac{x^4}{e^x}\right) = \frac{e^x}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - \frac{x^4}{e^x}\right) = \frac{e^x}{x^2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - \frac{x^4}{e^x}\right)$$

Par somme et quotient $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = 1$ et par croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$ donc par somme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - \frac{x^4}{e^x} = 1$

Par croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ donc par produit $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

9) Soit la fonction f définir sur $R\backslash\{-1\}$ par $f(x) = 5x + 1 - \frac{3}{x+1}$.

Réponses : b) et c)

Par somme on montre que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc C_f n'admet pas d'asymptote horizontale.

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x+1) = 0^- \; et \; \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x+1) = 0^+$ d'où par quotient et produit $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} -\frac{3}{x+1} = +\infty \; et \; \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} -\frac{3}{x+1} = -\infty$

Or $\lim\limits_{x \to -1} 5x+1 = -4$ donc par somme $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty \; et \; \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$

Ce qui signifie bien que C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

$f(x) - (5x+1) = -\frac{3}{x+1}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{3}{x+1} = 0$

De même on montre que $\lim\limits_{x - \infty} -\frac{3}{x+1} = 0$

Ce qui signifie que C_f admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ d'équation $y = 5x+1$.

EXERCICE 2 :

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

1. a. Retrancher 2 % c'est multiplier par $1 - \frac{2}{100} = 1 - 0,02 = 0,98$.
D'une année sur l'autre on multiplie le nombre de panneaux par 0,98 puis on augment de nombre de panneaux de 250.

b. Avec la calculatrice il suffit de taper 10 560 Entrée puis $\times 0,98 + 50$.
Entrée donne $u_1 \approx 10599$, les appuis successifs de Entrée donnent u_2, u_3, etc.
On obtient $u_{68} \approx 12009$.
le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de 68 ans soit en 2088.

c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while u ⩽ 12000 :
    u = 0,98 * u + 250
    n = n + 1
```

2. *Initialisation* : $u_0 = 10560 \leqslant 12500$: la proposition est vraie au rang 0.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 12500$ soit en multipliant par 0,98 :
$0,98u_n \leqslant 0,98 \times 12500$ et en ajoutant 250 à chaque membre :
$0,98u_n + 250 \leqslant 0,98 \times 12500 + 250$ ou $u_{n+1} \leqslant 12250 + 250$ et finalement $u_{n+1} \leqslant 12500$: la proposition est vraie au r ng $n+1$.
La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de la récurrence la proposition $u_n \leqslant 12500$ est vraie pur tout naturel $n \in \mathbb{N}$.

3. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$.
Or d'après le résultat précédent :
$u_n \leqslant 12500 \Rightarrow 0,02u_n \leqslant 0,02 \times 12500$ ou encore $0,02u_n \leqslant 250$ ou en ajoutant à chaque membre $-0,02u_n$:
$0 \leqslant 250 - 0,02u_n$; on a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 12 500 : elle est donc convergente vers une limite ℓ, telle que $\ell \leqslant 2500$.

5. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 12500 = 0,98u_n + 250 - 12500$, soit $v_{n+1} = 0,98u_n - 12250 = 0,98u_n - 12250 \times \frac{0,98}{0,98} = 0,98u_n - 12500 \times 0,98 = 0,98(u_n - 12500)$ soit enfin $v_{n+1} = 0,98v_n$: cette relation vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 de premier terme $v_0 = u_0 - 12500 = 10560 - 12500 = -1940$.

b. On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,98^n$, soit $v_n = -1940 \times 0,98^n$.

c. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 12500 \iff u_n = v_n + 12500 = 12500 - 1940 \times 0,98^n$.

d. Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,98^n = 0$, donc
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 12500$
Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

1. La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = -0,02 \times (-500)\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 10\mathrm{e}^{-0,02x+1,4}$.

Comme la fonction exponentielle est strictement positive, on en déduit que $f'(x) > 0$: la fonction est donc strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

2. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = 12500$.

3. Il faut résoudre l'inéquation :

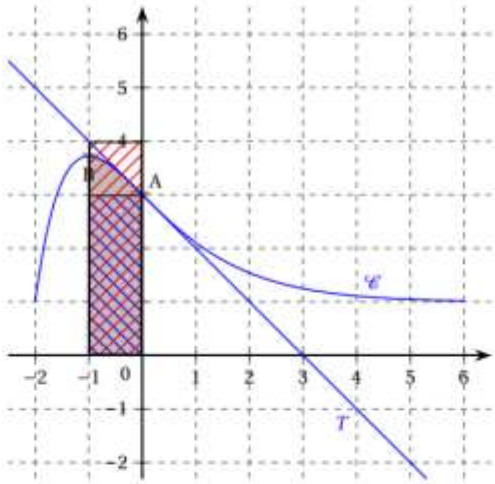
$12500 - 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} > 12000 \iff 500 > 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} \iff 1 > \mathrm{e}^{-0,02x+1,4} \iff \mathrm{e}^0 \geqslant \mathrm{e}^{-0,02x+1,4}$, soit par croissance de la fonction exponentielle :

$0 > -0,02x + 1,4 \iff 0,02x > 1,4$ et en multipliant chaque membre par 50 :

$x > 70$:il faut donc attendre 71 ans pour que le nombre de panneaux dépasse 12 000, soit en 2091.

EXERCICE 3 :

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[-2\,;6]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.
Le point A de coordonnées $(0\,;3)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-2\,;6]$.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point B d'abscisse -1.



Partie A

1. $\mathrm{A} \in \mathscr{C}$ donc $f(0) = 3$.
2. $f'(0) = -1$, donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A a pour équation $y = -x + 3$.
3. D'après les variations de la fonction f, $f' > 0$ sur $[-2\,;-1[$ et $f' < 0$ sur $]-1\,;6]$..
4. f est concave sur $[-2\,;0[$ et convexe sur $]0\,;6]$.

Partie B

La fonction f est définie par $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x} + 1$ pour tout $x \in [-2\,;6]$.

1. $f(6) = (6+2)\,\mathrm{e}^{-6} + 1 = 8\mathrm{e}^{-6} + 1 \approx 1{,}02$
2. Pour tout $x \in [-2\,;6]$, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} + 0 = (1 - x - 2)\,\mathrm{e}^{-x} = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
3. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$ donc s'annule et change de signe pour $x = -1$.
   $f(-2) = (-2+2)\,\mathrm{e}^{2} + 1 = 1$; $f(-1) = (-1+2)\,\mathrm{e}^{1} + 1 = \mathrm{e} + 1 \approx 3{,}72$
   On établit le tableau de variations de la fonction f sur $[-2\,;6]$:

x	-2		-1		6
$-x-1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\mathrm{e}+1$	$\searrow$	$8\mathrm{e}^{-6}+1$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ donc par composée $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x + 2 = -\infty$ donc par produit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$$f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x} + 1 = \frac{x}{e^{x}} + 2e^{-x} + 1$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ donc par composée et produit $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-x} = 0$

Par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$, donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

On peut donc en déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

<u>EXERCICE 4 :</u>

Soit la fonction f définie par $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)e^{2x}$ sur R.

1. $f'(x) = (4x-4)e^{2x} + (2x^2 - 4x + 1) \times 2e^{2x}$ on utilise $(u \times v)' = u'v - uv'$
$f'(x) = e^{2x}(4x - 4 + 4x^2 - 8x + 2) = e^{2x}(4x^2 - 4x - 2)$
Pour tout $x \in R.\, e^{2x} > 0$ le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $4x^2 - 4x - 2$.
Étude du signe de $4x^2 - 4x - 2$:
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-2) = 16 + 32 = 48$, $\Delta > 0$ le polynôme admet dont deux racines réelles distinctes
$x_1 = \frac{4-\sqrt{48}}{8} = \frac{4-4\sqrt{3}}{8} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$2x^2 - 4x + 1 = x^2\left(2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$
Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)} = +\infty$
$f(x) = 2x^2e^{2x} - 4xe^{2x} + e^{2x} = 2x^2e^{x}e^{x} - 4xe^{x}e^{x} + e^{2x}$
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

Donc par produit $\lim_{x\to-\infty} 2x^2e^xe^x = \lim_{x\to-\infty} 4xe^xe^x = 0$ et par somme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

On peut donc en déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) en $-\infty$.

2. **a.** $f(0) = 1$

   b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 4x + 1)e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$ car $e^{2x} > 0$ *pour tout* $x \in R$

   $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 16 - 8 = 8; \Delta > 0$ le trinôme admet donc deux racines réelles distinctes.

   $x_1 = \frac{4-\sqrt{8}}{4} = \frac{4-2\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

   $S = \left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right\}$

   c. Quelles interprétation graphique peut-on faire des réponses obtenues en a et b ?

   Interprétation graphique de la a) : la courbe C_f coupe l'axe des ordonnées au point $A(0; 1)$.

   Interprétation graphique de la b) : la courbe C_f coupe l'axe des abscisses aux points $B\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\ ; 0\right)$

3. $T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

   $or\ f'(0) = -2$ donc $T_0 : y = -2x + 1$

4. **a.** $f''(x) = (8x - 4)e^{2x} + (4x^2 - 4x - 2) \times 2e^{2x} = e^{2x}(8x - 4 + 8x^2 - 8x - 4) = e^{2x}(8x^2 - 16) = 8e^{2x}(x^2 - 2)$

   b. Pour tout $x \in R, 8e^{2x} > 0$, le signe de $f''(x)$ ne dépend donc que de $x^2 - 2$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		+	0	$-$	0	+	

Ce qui signifie que la fonction f est convexe sur $]-\infty; -\sqrt{2}[$ et sur $]\sqrt{2}; +\infty[$ et la fonction est concave sur $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$.

c. Sur l'intervalle $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, la fonction est concave, donc C_f est en-dessous de ses tangentes sur cecet intervalle, or 0 appartient À cet intervalle donc C_f en dessous de T_0 sur cet intervalle.

<u>QUESTION BONUS :</u>

Tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan IJK, avec $I \in [EF]; K \in face\ ABFE\ et\ J \in face\ ADHE$.

figure Geogebra :

https://www.geogebra.org/classic/kgscvqbf