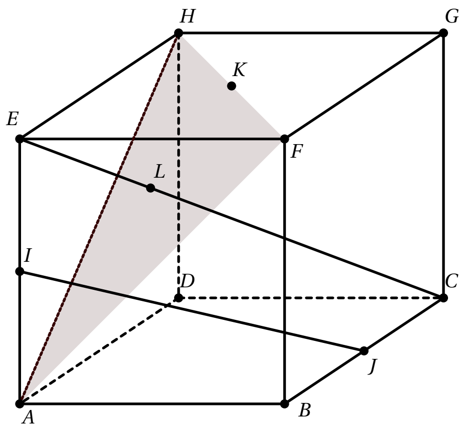
∽ Devoir surveillé n°3 ∾

EXERCICE 1



ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
On appelle $\mathscr{P}$ le plan (AFH).
Le point I est le milieu du segment [AE],
le point J est le milieu du segment [BC],
le point K est le milieu du segment [HF],
le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathscr{P}$.

Les questions 1 à 3 du QCM reposent sur le cube ci-contre.

Ceci est un questionnaire à choir multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des affirmations proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. **a.** Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
b. Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
c. Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
d. Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.

2. **a.** Les droites (IJ) et (KG) sont strictement parallèles.
b. Les droites (IJ) et (KG) sont non coplanaires.
c. Les droites (IJ) et (KG) sont sécantes.
d. Les droites (IJ) et (KG) sont confondues.

3. **a.** La droite (GC) coupe le plan (AFH).
b. La droite (GC) est contenue dans le plan (AFH).
c. La droite (GC) est strictement parallèle au plan (AFH).

4. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-6}{x^2-1}$. La courbe représentative de f :
a. n'admet pas d'asymptote horizontale
b. admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$
c. une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

5. On reprend la même fonction que celle de la question 4), sa courbe représentative :
a. n'admet pas d'asymptote verticale.
b. admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.
c. admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

6. Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2e^{x+1} + x$:
a. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$
b. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$
c. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

EXERCICE 2

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.
Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :
pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
3. **a.** Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

   a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
     u=......
     n = n+1
   return n
```

   b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2,5 - u_n$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0).

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

   c. Calculer la limite de la suite (u_n).

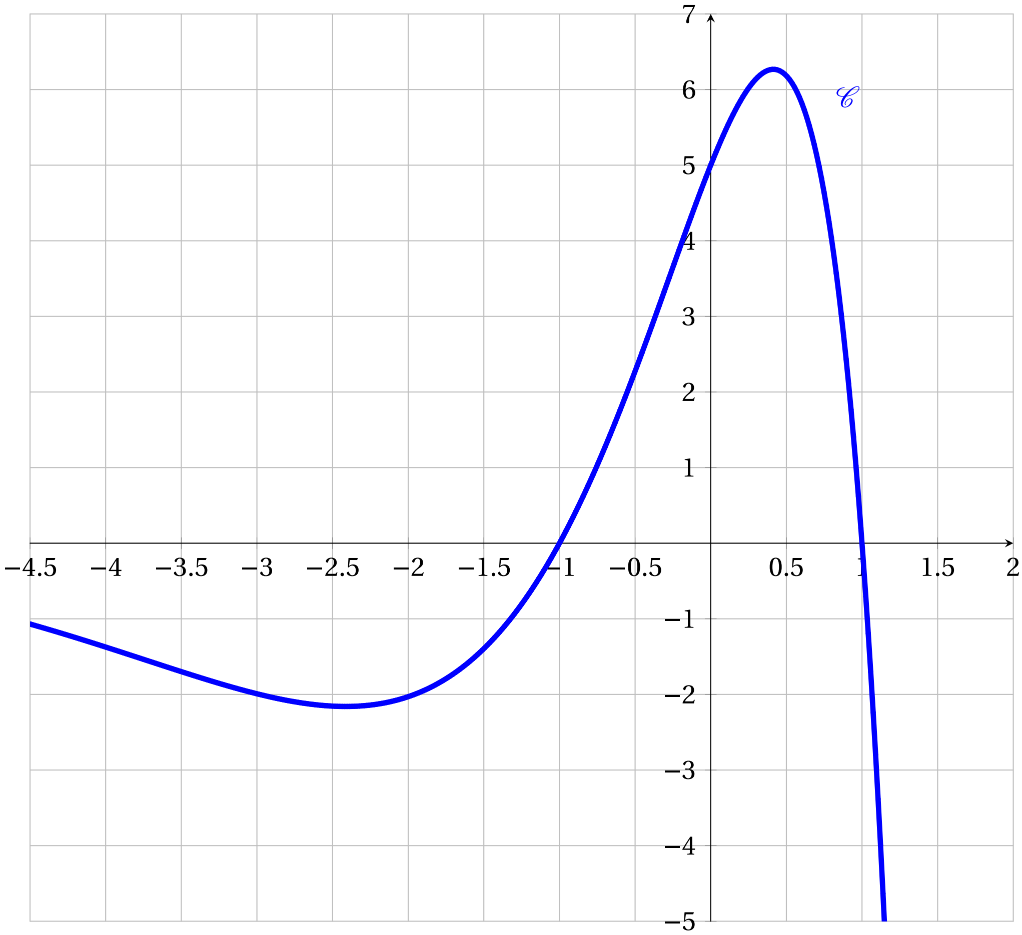
   d. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.
   D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-5x^2 + 5)\,e^x$$

On note f' la fonction dérivée de f, et f'' la fonction dérivée seconde. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan, donnée ci-dessous :



1. **a.** Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Placer le point A dans le repère ci-dessus.

   b. Démontrer que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points. Déterminer leurs coordonnées et les placer dans le repère ci-dessus.

   c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-5x^2 - 10x + 5)\,e^x$.

   d. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;2]$.

2. Soit Δ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   a. Montrer qu'une équation de Δ est $y = 5x + 5$.

   b. Tracer la droite Δ dans le repère ci-dessus.

3. **a.** Montrer que, pour tout $x \in [-5\,;2]$, $f''(x) = -(5x^2 + 20x + 5)\,e^x$.

   b. Étudier la convexité de le fonction f sur l'intervalle $[-5\,;2]$.

   c. En déduire que $(1 - x^2)e^x < x + 1$ sur $[-2 + \sqrt{3}; 2]$.

4. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, quelle(s) interprétation(s) graphique(s) peut-on en faire ?