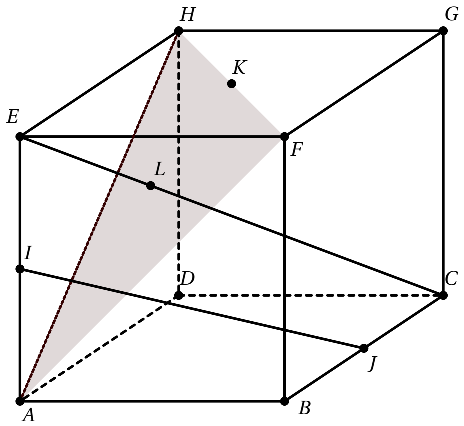
Éléments de correction du DS n°3

Exercice 1

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
On appelle $\mathcal{P}$ le plan (AFH).
Le point I est le milieu du segment [AE],
le point J est le milieu du segment [BC],
le point K est le milieu du segment [HF],
le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathcal{P}$.

Les questions 1 à 3 du QCM reposent sur le cube ci-contre.



1. **a.** Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
   b. Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
   c. Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
   d. Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.

2. **a.** Les droites (IJ) et (KG) sont strictement parallèles.
   b. Les droites (IJ) et (KG) sont non coplanaires.
   c. Les droites (IJ) et (KG) sont sécantes.
   d. Les droites (IJ) et (KG) sont confondues.

3. **a.** La droite (GC) coupe le plan (AFH).
   La droite (GC) est contenue dans le plan (AFH).
   b. La droite (GC) est strictement parallèle au plan (AFH).

4. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-6}{x^2-1}$. La courbe représentative de f :
   a. n'admet pas d'asymptote horizontale
   b. admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$
   c. une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

5. On reprend la même fonction que celle de la question 4), sa courbe représentative :
   a. n'admet pas d'asymptote verticale.
   b. admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.
   c. admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

6. Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2e^{x+1} + x$:
   a. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$
   b. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$
   c. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC - ASIE - 17 MAI 2022

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.
Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de $0,25$ mg de la substance médicamenteuse.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :
pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.

Solution : Au bout de 30 min, 10 % de 1 mg ont disparu : il en reste donc 0,9 mg et on donne alors 0,25 mg supplémentaires : on a donc $u_1 = 1,15$.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

Solution : Si u_n est la quantité de médicament présente au bout de n périodes de 30 min, à la $(n+1)^{\text{e}}$ période 10 % auront disparu; il en restera donc $0,9u_n$ et on donne alors 0,25 mg de médicament supplémentaire; on a donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

3. **a.** Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

Solution : Soit $\mathscr{P}(n)$ la double inégalité $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

- **Initialisation** : On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,15$ soit $u_0 \leqslant u_1 < 5$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** :
  On suppose qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k \leqslant u_{k+1} < 5$.
  Montrons alors que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} < 5$.
  D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_k \leqslant u_{k+1} < 5 &\Longleftrightarrow 0,9u_k \leqslant 0,9u_{k+1} < 5 \times 0,9 \text{ , car } 0,9 > 0 \\ &\Longleftrightarrow 0,9u_k + 0,25 \leqslant 0,9u_{k+1} + 0,25 < 5 \times 0,9 + 0,25 \\ &\Longleftrightarrow u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4,75 \\ &\Longrightarrow u_{k+1} \leqslant u_{k+2} < 5 \text{ , donc } \mathscr{P}(k+1) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Solution : La première partie du résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et la deuxième que cette suite est majorée par 5 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \leqslant 5$.

4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à $1,8$ mg.

   a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

Solution :

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while u < 1.8 :
      u=0.9*u+0.25
      n = n+1
   return n
```

b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution : Le script renvoie $n = 8$,car $u_7 \approx 1,783 < 1,8$ et $u_8 \approx 1,854 > 1,8$.
Le médicament est réellement efficace après 4 heures (car 8×30 minutes).

5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2,5 - u_n$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0).

Solution : $v_n = 2,5 - u_n \iff u_n = 2,5 - v_n$ (*) Puis :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 2,5 - u_{n+1} \\
&= 2,5 - (0,9u_n + 0,25) \\
&= 2,5 - 0,9u_n - 0,25 \\
&= 2,25 - 0,9u_n \\
&= 2,25 - 0,9(2,5 - v_n) \text{ , d'après (*)} \\
&= 2,25 - 2,25 + 0,9v_n \\
&= 0,9v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme $v_0 = 2,5 - u_0 = 2,5 - 1 = 1,5$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

Solution : On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, , $v_n = v_0 \times 0,9^n$, soit $v_n = 1,5 \times 0,9^n$, d'où puisque $u_n = 2,5 - v_n$:
Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

c. Calculer la limite de la suite (u_n).

Solution : Comme $-1 < 0,9 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$, donc par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2,5$.

d. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.
D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

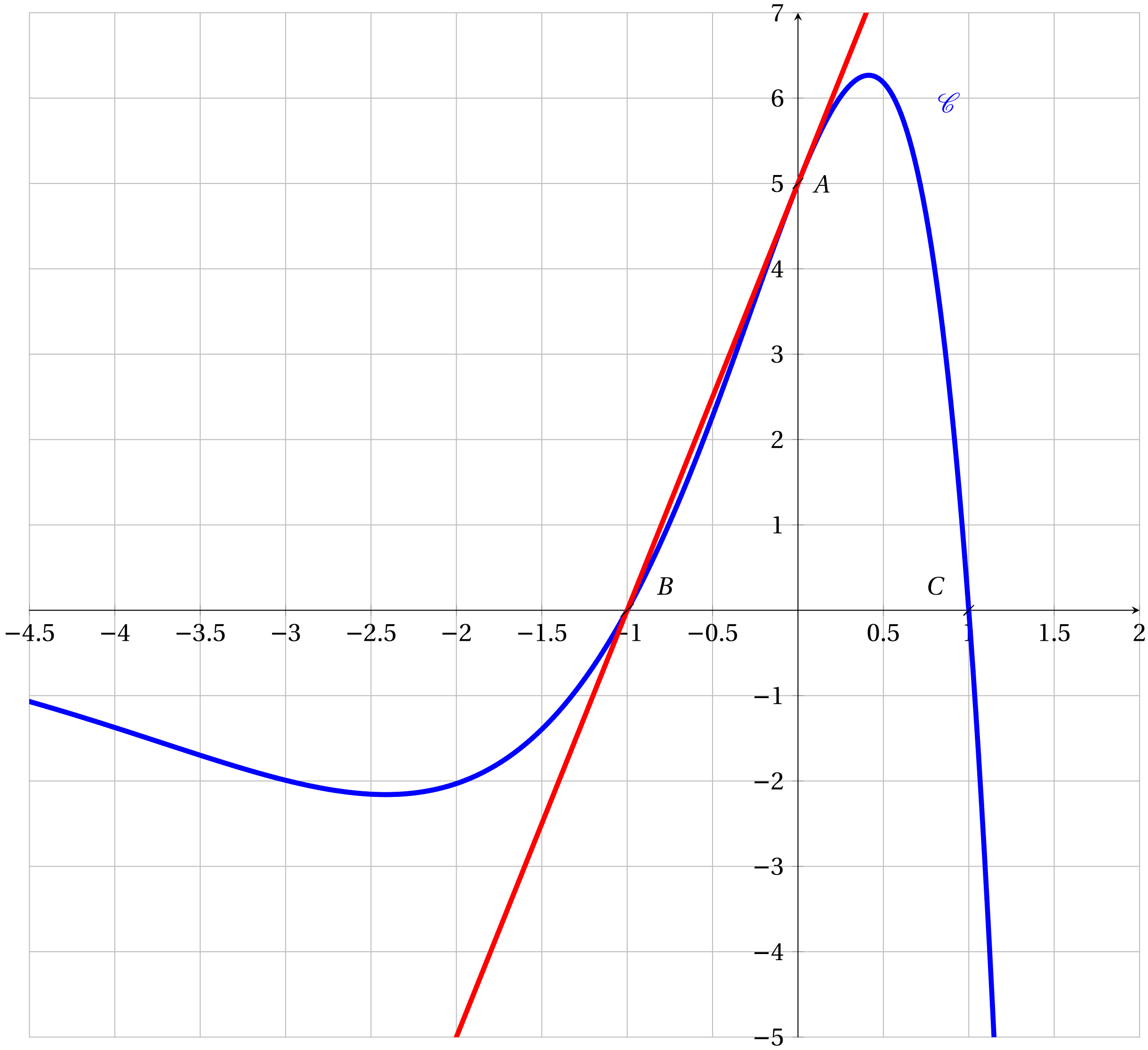
Solution : Comme la suite (u_n) est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2,5 < 3$, cela signifie que les termes de la suite vont se rapprocher de 2,5 sans jamais dépasser cette valeur. Aucun terme ne dépassera 2,5, et encore moins 3.
Conclusion : à aucun moment le traitement ne sera dangereux pour le patient.

Exercice 3 : d'après Bac ES - Nouvelle-Calédonie - 26 novembre 2019 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-5x^2 + 5)\,\mathrm{e}^x$$

On note f' la fonction dérivée de f, et f'' la fonction dérivée seconde. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan, donnée ci-dessous :



1. **a.** Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Placer le point A dans le repère ci-dessus.

> **Solution :** Le point A est l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées, donc il a pour abscisse 0. Ce point a pour ordonnée : $f(0) = 5\,\mathrm{e}^0 = 5$.
> Donc le point A a pour coordonnées $(0\,;5)$.

b. Démontrer que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points. Déterminer leurs coordonnées et les placer dans le repère ci-dessus.

> **Solution :** La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en des points d'ordonnées nulles.
> On résout l'équation $f(x) = 0$. Comme pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$, on résout $-5x^2 + 5 = 0$:
> $-5x^2 + 5 = 0 \iff 5(1 - x^2) = 0 \iff 5(1 + x)(1 - x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 1$
> Les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sont B $(-1\,;0)$ et C $(1\,;0)$

c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-5x^2 - 10x + 5)\,\mathrm{e}^x$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-10x) \times \mathrm{e}^x + (-5x^2 + 5) \times \mathrm{e}^x = (-5x^2 - 10x + 5)\,\mathrm{e}^x$.

d. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;\,2]$.

Solution : Pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-5x^2 - 10x + 5$
Le discriminant vaut $(-10)^2 - 4 \times (-5) \times 5 = 200$ donc le polynôme $-5x^2 - 10x + 5$ admet deux racines $x_1 = \dfrac{10 + \sqrt{200}}{-10} = \dfrac{10 + 10\sqrt{2}}{-10} = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{2}$.
Ce trinôme du second degré est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines donc :

x	-5		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		2
signe de $-5x^2 - 10x + 5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut donc en déduire que :

- la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-5\,;\,-1-\sqrt{2}\right]$;
- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-1-\sqrt{2}\,;\,-1+\sqrt{2}\right]$;
- la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-1+\sqrt{2}\,;\,2\right]$;

2. Soit Δ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

a. Montrer qu'une équation de Δ est $y = 5x + 5$.

Solution : Une équation de Δ est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
$f(0) = 5$ et $f'(0) = 5$ donc Δ a pour équation $y = 5(x-0) + 5$ soit $y = 5x + 5$.

b. Tracer la droite Δ dans le repère ci-dessus.

Solution : On détermine deux points de Δ pour la tracer : on sait que $\mathrm{A} \in \Delta$, et pour $x = -1$, $y = 0$ donc Δ passe par le point B de coordonnées $(-1\,;\,0)$.

3. **a.** Montrer que, pour tout $x \in [-5\,;\,2]$, $f''(x) = -(5x^2 + 20x + 5)\,\mathrm{e}^x$.

Solution : $\forall x \in [-5\,;\,2]$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (-10x - 10)\,\mathrm{e}^x + (-5x^2 - 10x + 5)\,\mathrm{e}^x \\
&= (-10x - 10 - 5x^2 - 10x + 5)\,\mathrm{e}^x \\
&= (-5x^2 - 10x - 5)\,\mathrm{e}^x \\
&= -(5x^2 + 20x + 5)\,\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

b. Étudier la convexité de le fonction f sur l'intervalle $[-5\,;2]$.

Solution :
$\mathrm{e}^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe du polynôme du second degré $-(5x^2+20x+5) = -5x^2-20x-5$.
On calcule son discriminant : $\Delta = (-20)^2 - 4\times(-5)\times(-5) = 400-100 = 300 > 0$.
Le polynôme a donc 2 racines : $x_1 = \dfrac{20-\sqrt{300}}{2\times(-5)} = \dfrac{20-10\sqrt{3}}{-10} = -2-\sqrt{3}$ et $x_2 = -2+\sqrt{3}$.
De plus, ce polynôme est du signe du coefficient de x^2, donc négatif, à l'extérieur des racines :

x	-5		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		2
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc :

- $f''(x) < 0$ sur $\left[-5\,;-2-\sqrt{3}\right[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle ;
- $f''(x) > 0$ sur $\left]-2-\sqrt{3}\,;-2+\sqrt{3}\right[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle ;
- $f''(x) < 0$ sur $\left]-2+\sqrt{3}\,;2\right]$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

c. En déduire que $(1-x^2)e^x < x+1$ sur $[-2+\sqrt{3};2]$.

Solution : Sur $[-2+\sqrt{3};2]$, la fonction f est concave, sa courbe se situe donc en dessous de ses tangentes sur cet intervalle.
Or, $0 \in [-2+\sqrt{3};2]$ donc la tangente en 0 à la courbe représentative de f dont l'équation est $y = 5x+5$ est au dessus de la courbe.
Cela se traduit par l'inégalité suivante sur $[-2+\sqrt{3};2]$: $f(x) < 5x+5$, soit $(-5x^2+5)\,\mathrm{e}^x < 5x+5$ ou encore en simplifiant par 5 : $(-x^2+1)\,\mathrm{e}^x < x+1$.

4. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, quelle(s) interprétation(s) graphique(s) peut-on en faire ?

Solution : En $+\infty$: par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^2+5 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$: on ne peut pas faire d'interprétation graphique.
En $-\infty$:

- **méthode 1 : par factorisation** : $f(x) = (-5x^2+5)\,\mathrm{e}^x = (-5+\dfrac{5}{x^2})x^2\,\mathrm{e}^x$.
  Or, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} -5+\dfrac{5}{x^2} = -5$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^x = 0$.
  Donc finalement, par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
- **méthode 2 : par développement** : $f(x) = (-5x^2+5)\,\mathrm{e}^x = -5\,\mathrm{e}^x x^2 + 5\,\mathrm{e}^x$.
  Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^x = 0$, donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^2\,\mathrm{e}^x = 0$.
  De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} 5\,\mathrm{e}^x = 0$
  Donc finalement, par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.