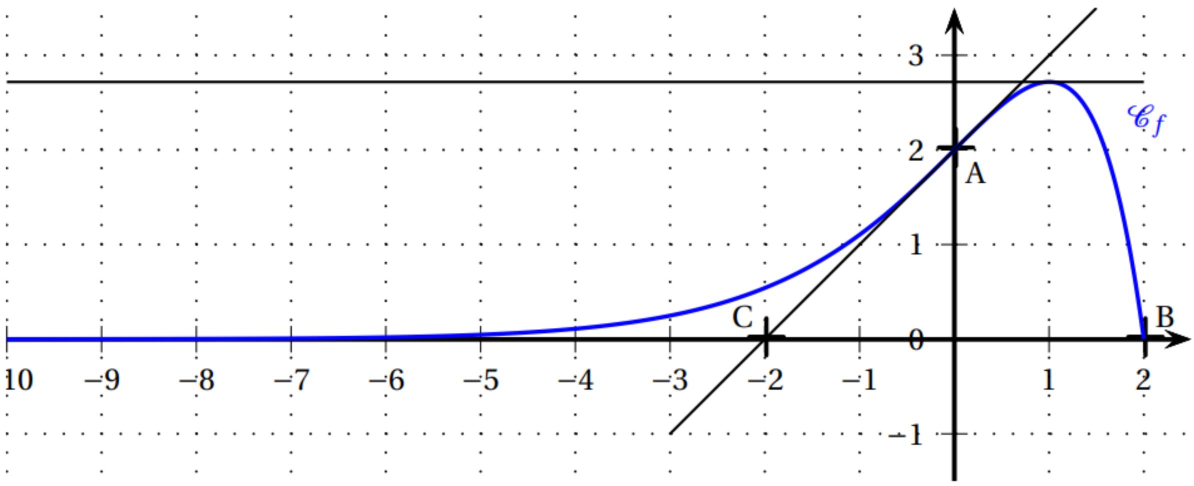
ENTRAÎNEMENT DS2	Term spé
Thèmes: dérivation et convexité; suites	

EXERCICE 1_ DÉRIVATION ET CONVEXITÉ

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$. On a placé les points A$(0\,;\,2)$, B$(2\,;\,0)$ et C$(-2\,;\,0)$.
On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$.
2. Indiquer la valeur de $f'(1)$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-10\,;\,2]$.
5. Indiquer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$.
6. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe, et celui sur lequel elle est concave.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A.
On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$ par :

$$f(x) = (2-x)\mathrm{e}^{x}.$$

.

1. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[-10\,;\,2]$.
   b. En déduire la valeur de $f'(1)$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

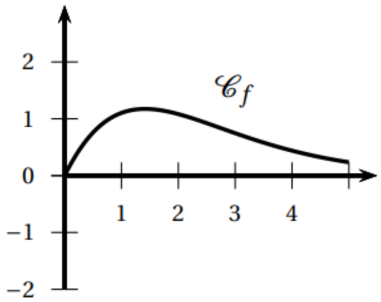
3. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle [-10;2].

4. a. Étudier la convexité de f sur l'intervalle [-10;2].

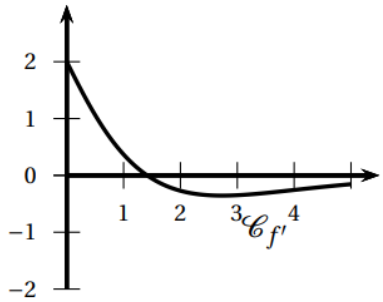
b. Soit (C) la courbe représentative de la fonction f, (C) admet-elle un point d'inflexion?

c. En déduire que $(2-x)e^{x} - x \geq 2$ pour tout $x\epsilon[-10;0]$.

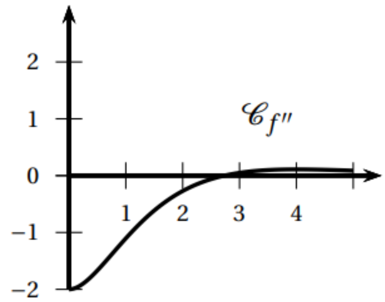
EXERCICE 2_ DÉRIVATION ET CONVEXITÉ



Courbe $\mathscr{C}_f$



Courbe $\mathscr{C}_{f'}$



Courbe $\mathscr{C}_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathscr{C}_{f'}$ et $\mathscr{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.

Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

1. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.

2. a. Donner un intervalle défini par deux entiers sur lequel la fonction f semble convexe.

b. Expliquer pourquoi on peut conjecturer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de ce point d'inflexion.

3. Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0?

$y = x$ $\qquad$ $y = 2x+1$ $\qquad$ $y = 2x$ $\qquad$ $y = \dfrac{3}{4}x$

Partie B

La fonction f représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f(x) = \left(x^2+2x\right)\mathrm{e}^{-x}$.

1. a. Montrer que la dérivée f' de f est définie par $f'(x) = \left(-x^2+2\right)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x de l'intervalle $[0;5]$.

b. Déterminer les variations de f sur $[0;5]$ et préciser l'abscisse de son maximum.

c. Donner la valeur arrondie au millième du maximum de f.

2. a. Montrer que $f''(x) = (x^2 - 2x - 2)e^{-x}$.

b. En déduire la convexité de f et les éventuels points d'inflexion de sa courbe représentative.

EXERCICE 3: SUITES

Principaux domaines abordés : Suites numériques ; raisonnement par récurrence ; suites géométriques.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. **a.** Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

c. Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

EXERCICE 4: SUITES

Commun à tous les candidats

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.
Elle sort les gâteaux du congélateur à -19 °C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25 °C.
Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3$ °C.

I – Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.
Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.
Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.
On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25).$$

1. Justifier que, pour tout entier n, on a $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$
2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $T_n \leqslant 25$.
   En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n).
5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.
6. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.
   a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
   c. En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7. **a.** Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.
   Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
   b. Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 °C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.
   c. Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```
def seuil() :
    n=0
    T= ..........................
    while T......................
        T= ....................
        n=n+1
    return
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

EXERCICE 5: QUESTIONS EN VRAC

1. **a.** Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3e^{-x}}{5-x}$, étudier le sens de variation de f sur son ensemble de définition.

   b. Montrer que $f''(x) = \frac{3e^{-x}(x^2-8x+17)}{(5-x)^3}$ et en déduire la convexité de f sur son ensemble de définition.

2. Soit la fonction g définie par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$ sur [-5;3].
   - **a.** Déterminer le sens de variation de g sur [-5;3]
   - **b.** On admettra que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [-5;3] et que $\alpha \simeq 0,03$. En déduire le signe de $g(x)$ sur [-5;3].