ENTRAÎNEMENT DS2 _ éléments de correction	Term spé

EXERCICE 1_ CENTRES ÉTRANGERS JUIN 2019_ EX4

Partie A

1. $f(0) = 2$ car $A\ (0\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_f$.
   $f(2) = 0$ car $B\ (2\ ;\ 0) \in \mathscr{C}_f$.
2. $f'(1) = 0$ car la tangente au point d'abscisse 1 à $\mathscr{C}_f$ est horizontale.
3. D'après l'énoncé, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A est la droite (AC) donc son cœfficient directeur m est donné par :
   $m = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{0-2}{-2-0} = 1$.
   Donc (AC) a pour équation réduite $y = x + p$, où p est l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire l'ordonnée du point de la droite qui a pour abscisse 0. Soit $p = 2$.
   Finalement, $(AC) : y = x + 2$.
4. On trace la droite d'équation $y = 1$ et on cherche le nombre de points d'intersection entre cette droite et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-10\ ;\ 2]$.
   $f(x) = 1$ possède 2 solutions.
5. Par lecture graphique, il semble que :
   — f soit croissante sur $[-10\ ;\ 1]$;
   — f soit décroissante sur $[1\ ;\ 2]$.
6. Par lecture graphique, il semble que :
   — f soit convexe sur $[-10\ ;\ 0]$;
   — f soit concave sur $[0\ ;\ 2]$.

Partie B

1. $f(0) = 2 \times e^0 = 2$ et $f(2) = (2-2)e^2 = 0$.
   a) $f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = e^x(1-x)$.
   b) $f'(1) = e^1(1-1) = 0$

2. L'équation réduite de la tangente en 0 à la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée par :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$f'(0) = e^0(1-0) = 1$ et $f(0) = 2$, d'où :

$$T_A : y = x + 2$$

3. $f'(x) = e^x(1-x)$ d'après la question 1.b. Pour tout $x \in R$, $e^x > 0$ le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $1 - x$.

x	-10		1		2
Signe de $1-x$		$+$	0	$-$	
Sens de variation de f	$12e^{-10}$	↗	e	↘	0

4. a. $f''(x) = e^{x}(1 - x) + e^{x} \times (-1) = e^{x}(1 - x - 1) = - xe^{x}$

Pour tout $x \in R$, $e^{x} > 0$, le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $- x$.

x	-10		0		2
Signe de $-x$ = signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est donc convexe sur [-10;0] et concave sur [0;2].

b. Puisque la dérivée seconde s'annule en changeant de signe, cela signifie que la courbe admet un point d'inflexion (ici en (0;2)).

c. Puisque la fonction est convexe sur [-10;0], sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes. Au point d'abscisses 0, la courbe admet un point d'inflexion, ce qui signifie que la tangente en 0 est confondue avec la courbe en ce point puis est située strictement sous la courbe sur [-10;0[. On a donc pour tout $x \in [-10; 0]$: $(2 - x)e^{x} \geq x + 2 \Leftrightarrow (2 - x)e^{x} - x \geq 2$

EXERCICE 2 _ ANTILLES GUYANE JUIN 2018 _ EX4

Partie A

1. En utilisant la première courbe et dans la limite de précision du graphique, la fonction f atteint son maximum pour une valeur $x_0 \in]1\,;2[$.

2. En utilisant la troisième et dans la limite de précision du graphique, la fonction f semble être convexe sur l'intervalle $[3\,;5]$.
En effet, sur cet intervalle on peut voir que $f''(x) \geqslant 0$. En utilisant là-encore le troisième graphique, la dérivée seconde de la fonction f s'annule et change de signe sur l'intervalle $[0\,;5]$.
La courbe représentative de la fonction$f$ admettra donc un point d'inflexion dont l'abscisse appartient à l'intervalle $]2\,;3[$

3. L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est :
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
D'après le premier graphique, $f(0) = 0$; et d'après le second, $f'(0) = 2$.
Donc l'équation réduite de la tangente est $y = 2x$.

Partie B

La fonction f représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par $f(x) = \left(x^2 + 2x\right)e^{-x}$.

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;5]$. Pour tout $x \in [0\,;5]$, $f(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = \left(x^2 + 2x\right)$ et $v(x) = e^{-x}$.
En écrivant $u'(x) = 2x + 2$ et $v'(x) = -e^{-x}$,

$$f'(x) = (2x+2) \times e^{-x} + \left(x^2 + 2x\right) \times -e^{-x} = e^{-x}\left(2x + 2 + (x^2 + 2x) \times (-1)\right)$$
$$= e^{-x}\left(2x + 2 - x^2 - 2x\right) = e^{-x}\left(-x^2 + 2\right)$$

b. Pour tout $x \in [0\,;5]$, $f'(x) = e^{-x}\left(-x^2 + 2\right) = e^{-x}\left(-x + \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$
Or sur l'intervalle $[0\,;5]$, $e^{-x} > 0$ et $x + \sqrt{2} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-x + \sqrt{2}$.
$-x + \sqrt{2} \geqslant 0 \iff x \leqslant \sqrt{2}$.

$f(0) = 0$ $\quad$ $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$ $\quad$ $f(5) = \left(5^2 + 2 \times 5\right)e^{-5} = 35e^{-5}$

Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$ est :

x	0		$\sqrt{2}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$	$\searrow$	$35e^{-5}$

c. Pour $x = \sqrt{2}$ la fonction f atteint un maximum : $f\left(\sqrt{2}\right) = \left(2+2\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 1,174$.

2. a. $f'(x) = e^{-x}(-x^2+2)$ donc $f''(x) = -e^{-x}(-x^2+2) + e^{-x}(-2x) = e^{-x}(x^2-2-2x)$

b. Pour tout $x \in R$, $e^{-x} > 0$ donc le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $x^2 - 2x - 2$.

$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-2) = 12$; $\Delta > 0$ le trinôme admet donc deux racines réelles:

$x_1 = \frac{2-\sqrt{12}}{2} = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

x	0		$1+\sqrt{3}$		5
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction est convexe sur $[0; 1+\sqrt{3}]$ et concave sur $[1+\sqrt{3}; 5]$. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $1+\sqrt{3}$; ce qui signifie que sa courbe représentative admet un point d'inflexion au point d'abscisse $1+\sqrt{3}$.

EXERCICE 3: BAC Mars 2021 - sujet1 (ex 4) _ sujet entraînement

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$.

Pour $n = 1$, $u_1 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. a. La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :
= 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1.

b. La suite (u_n) semble croissante.

3. a. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité**
  On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ (hypothèse de récurrence).

$$n \leqslant u_n \leqslant n+1 \iff \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)$$

$$\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n$$

$$\iff n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant n + \frac{3}{4}$$

$$\iff n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1 \iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4}$$

donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.

On a démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. D'après la question précédente :

- Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ donc $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ d'où on tire $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, $n \leqslant u_n$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c. Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$ c'est-à-dire : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Pour tout n, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \dfrac{3}{4}(v_n + n) - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n + \dfrac{3}{4}n - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n$

$v_0 = u_0 - 0 = 1$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

b. On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

EXERCICE 4: BAC Juin 2021 - Métropole (ex 3)

I – Premier modèle

En 10 minutes la température a augmenté de $1,3 - (-19) = 1,3 + 19 = 20,3$ soit une augmentation de $2,03$ °C.
Selon ce premier modèle l'augmentation de la température serait au bout de 25 minutes de $25 \times 2,03 = 50,75$(°C).
Les gâteaux seraient donc à une température de $-19 + 50,75 = 31,75$(°C) alors que la température ambiante est de 25°C : c'est impossible, donc ce modèle n'est pas pertinent.

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur; ainsi $T_0 = -19$.
On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante : pour tout n, $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.

1. On a : $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25) \iff T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 1,5$
$\iff T_{n+1} = T_n - 0,06T_n + 1,5 \iff T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.

2. ✦ Avec $n = 0$, la relation donne $T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = 1,5 - 17,86 = -16,36$;
✦ Avec $n = 1$, la relation donne $T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = 1,5 - 15,3784 = -13,8784$.

3. On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $T_n \leqslant 25$.
Initialisation - $T_0 = -19 \leqslant 25$; l'inégalité est vraie au rang 0.
Hérédité - Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant 25$ alors en multipliant par 0,94 :
$0,94T_n \leqslant 0,94 \times 25$, soit $0,94T_n \leqslant 23,5$.
D'où en en ajourant à chaque membre 1,5 :
$0,94T_n + 1,5 \leqslant 23,5 + 1,5$, soit finalement $T_{n+1} \leqslant 25$: l'inégalité est vraie au rang n.
Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.
D'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant 25$.
Ceci correspond à une évidence : la température des gâteaux ne peut dépasser la température ambiante.

4. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.
D'après la question précédente $T_n \leqslant 25$ soit en multipliant par 0,06 :
$0,06T_n \leqslant 0,06 \times 25$, ou $0,06T_n \leqslant 1,5$
et en prenant les opposés : $-1,5 \leqslant -0,06T_n$ et enfin en ajoutant à chaque membre 1,5 :
$0 \leqslant -0,6T_n + 1,5$.
On a donc démontré que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n \geqslant 0$: la suite (T_n) est donc croissante.

5. On a donc démontré que la suite (T_n) est croissante et majorée par 25 : d'après le théorème de la convergence monotone, cette suite converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 25$.

6. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94T_n + 1,5 - 25$ ou encore $U_{n+1} = 0,94T_n - 23,5 = 0,94\left(T_n - \dfrac{23,5}{0,94}\right) = 0,94(T_n - 25)$, soit finalement $T_{n+1} = 0,94U_n$: cette égalité montre que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,94 et de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$.

b. On sait que quel soit $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times 0,94^n$ ou $U_n = -44 \times 0,94^n$.
Or $U_n = T_n - 25 \iff T_n = U_n + 25$ ou encore $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$, soit finalement :

$$T_n = 25 - 44 \times 0,94^n, \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}$$

c. Comme $0 < 0,94 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,94^n = 0$, d'où par somme de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \ell = 25.$$

7. **a.** On a : $T_{30} = 25 - 44 \times 0,94^{30} \approx 18,12$ soit environ 18°Cau degré près.

b. La calculatrice donne $T_{17} \approx 9,63$ et $T_{18} \approx 10,55$, donc Cécile devra déguster son gâteau entre la 17e et la 18e minute après sa sortie.

c. On complète le programme suivant, écrit en langage Python, qui doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```
def seuil() :
    n = 0
    T = −19
    while T < 10
        T = 25 − 0,94T
        n = n+1
    return
```

EXERCICE 5: QUESTIONS EN VRAC

1. **a.** f est du type u/v et on a: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{-3e^{-x}(5-x)-3e^{-x}(-1)}{(5-x)^2} = \frac{3e^{-x}(-5+x+1)}{(5-x)^2} = \frac{3e^{-x}(x-4)}{(5-x)^2}$$

Pour tout $x \in R\backslash\{5\}$; $(5-x)^2 > 0$; $3e^{-x} > 0$ le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que de $x - 4$.

x	$-\infty$		4		5		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	

La fonction est donc décroissante sur $]-\infty; 4]$ puis croissante sur [4;5[et sur $]5; +\infty[$.

b.

$$f''(x) = \frac{(-3e^{-x}(x-4)+3e^{-x}\times 1)(5-x)^2 - 3e^{-x}(x-4)\times 2\times(5-x)\times(-1)}{(5-x)^4} = \frac{(3e^{-x}(-x+4+1))(5-x)+6e^{-x}(x-4)}{(5-x)^3} = \frac{3e^{-x}((-x+5)(5-x)+2(x-4))}{}$$

$$f''(x) = \frac{3e^{-x}((5-x)^2+2x-8)}{(5-x)^3} = \frac{3e^{-x}(25-10x+x^2+2x-8)}{(5-x)^3} = \frac{3e^{-x}(x^2-8x+17)}{(5-x)^3}$$

Pour tout $x \in R$, $3e^{-x} > 0$ *et* le signe de $(5 - x)^3$ est le même que celui de $(5 - x)$ (car $(5 - x)^3 = (5 - x)^2 \times (5 - x)$ *et* $(5 - x)^2 \geq 0)$.

Étude du signe de $x^2 - 8x + 17$:

$\Delta = 64 - 4 \times 1 \times 17 =- 4$, $\Delta < 0$ par conséquent le trinôme est toujours du signe de $a = 1$ soit positif.

Par conséquent le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $5 - x$.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	‖	$-$	

La fonction est donc convexe sur $]-\infty; 5[$ et concave sur $]5; +\infty[$; sa courbe représentative n'a pas de point d'inflexion car la dérivée seconde ne s'annule pas.

2.

a. $g'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$, étude du signe de $x^2 + x - 6$ (6>0).

$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$; $\Delta > 0$ le trinôme admet donc deux solutions réelles.

$x_1 = \frac{-1-5}{2} =- 3$ *et* $x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$.

x	-5		-3		2		3
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Car $a = 1 > 0$

La fonction est donc croissante sur [-5;-3] et sur [2;3] et décroissante sur [-3;2].

b. On admettra que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [-5;3] et que $\alpha \simeq 0,03$. En déduire le signe de $g(x)$ sur [-5;3].

x	-5		-3	α	2		3
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Sens de variation de g	6	↗	82	↘ 0	-43	↗	-26
Signe de g		+		0			-

Car $a = 1 > 0$