∽ Devoir surveillé n°2 ∾

EXERCICE 1 **10 points**

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
2. On admet que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution notée α. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
3. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Partie B

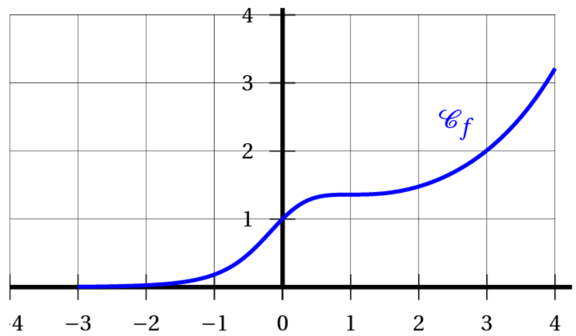
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$$

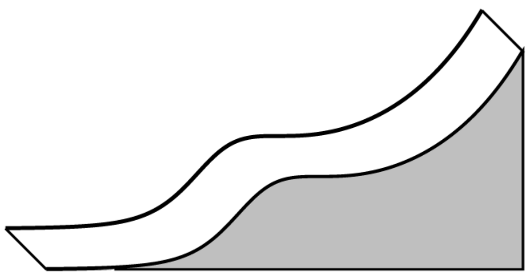
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. **a.** Montrer que sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2\ \mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 dont vous préciserez l'équation.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$


Vue de profil du toboggan

   a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

   b. Démontrer que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

   où p est la fonction définie dans la partie A.

   c. En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

EXERCICE 2 **10 points**

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.
   - **a.** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   - **b.** Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   - **c.** En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.
   - **d.** Calculer la limite de (a_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. - **a.** Recopier et compléter les 4 dernières lignes de l'algorithme ci-contre afin qu'il détermine le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à p.
   - **b.** Quelle est la valeur retournée par la commande **seuil**(2500) ?

```
def seuil(p) :
    n = 0
    a = 200
    while ... :
        n = ...
        a = ...
    return ...
```

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. - **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

     $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

   - **b.** Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n,

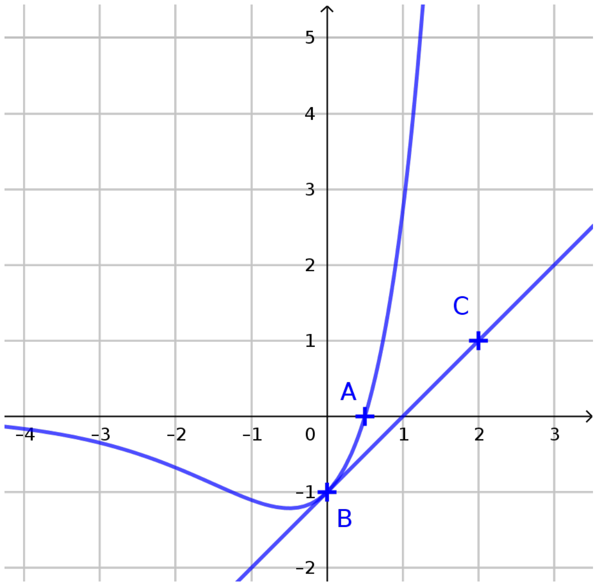
   $$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

EXERCICE BONUS **1 point**

Cet exercice ne rapporte qu'un seul point, à chercher SEULEMENT si vous avez fini le reste du sujet et que vous vous êtes bien relu.

Soient a et b deux nombres réels et soit $f : x \to (ax+b)e^x$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :

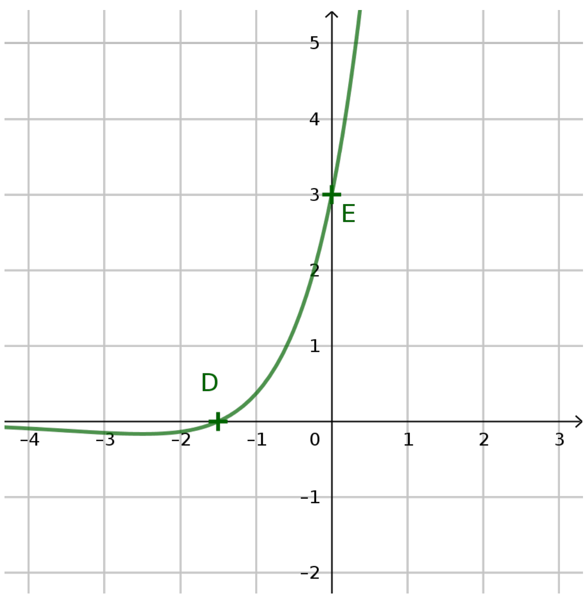


On a :

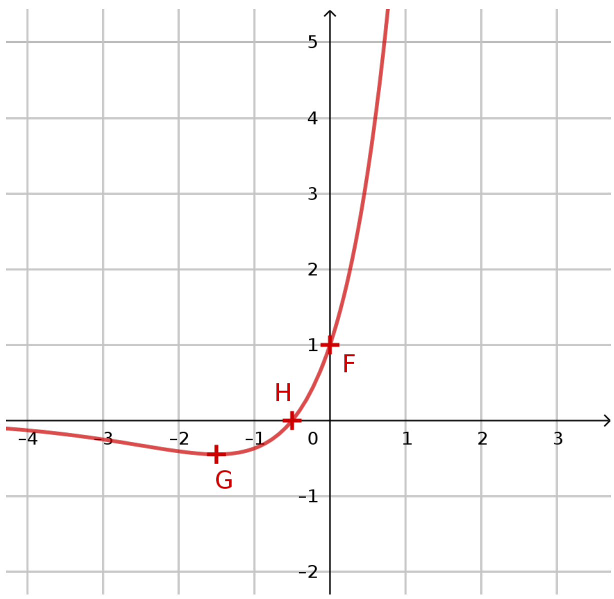
- $A\,(0{,}5\ ;\ 0)$
- $B\,(0\ ;\ -1)$
- $C\,(2\ ;\ 1)$
- la tangente à la courbe représentative de la fonction f en 0 passe par les points B et C.

1. A l'aide des informations ci-dessus, déterminer a et b. Détailler le raisonnement.

2. Voici deux courbes représentatives :



On a : $D\,(-1{,}5\ ;\ 0)$ et $E\,(0\ ;\ 3)$ appartiennent à la courbe.



On a : $F\,(0\ ;\ 1)$, $G\,(-1{,}5\ ;\ -0{,}45)$ et $H\,(-0{,}5\ ;\ 0)$ appartiennent à la courbe.

Parmi les deux courbes ci-dessus, laquelle des deux est représentative de la fonction f' ? de la fonction f'' ? Détailler le raisonnement.