☙ Éléments de correction du DS n°2 ❧

EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC - AMÉRIQUE DU NORD - 19 MAI 2022 **10 points**

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

> **Solution :** La fonction p est continue et dérivable sur $[-3 ; 4]$.
> $\forall x \in [-3 ; 4]$, $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$
> Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3 ; 4]$, $p'(x) > 0$.
> Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3 ; 4]$.

2. On admet que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3 ; 4]$ une unique solution notée α. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.

> **Solution :** À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.

3. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

> **Solution :** Comme la fonction p est strictement croissante et s'annule en α, on peut établir son tableau de signe sur $[-3 ; 4]$:

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. **a.** Montrer que sur l'intervalle $[-3 ; 4]$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2\ e^x}{\left(1 + x^2\right)^2}$.

> **Solution :** La fonction f est continue et dérivable sur $[-3 ; 4]$ (car $\forall x \in [-3 ; 4]$, $1 + x^2 \neq 0$).
> $\forall x \in [-3 ; 4]$, $f'(x) = \dfrac{e^x \times (1 + x^2) - e^x \times 2x}{\left(1 + x^2\right)^2} = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{\left(1 + x^2\right)^2} = \dfrac{(x-1)^2\ e^x}{\left(1 + x^2\right)^2}$.

b. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 dont vous préciserez l'équation.

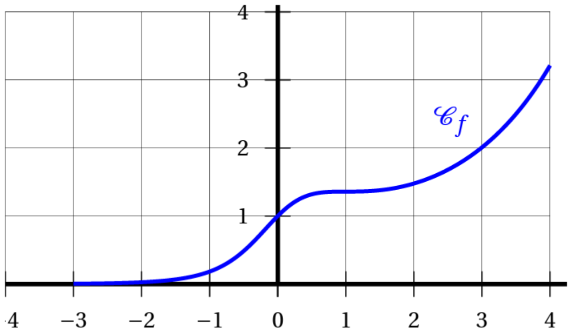
Solution :

$f'(x) = 0 \iff \dfrac{(x-1)^2\ \mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 \iff (x-1)^2\ \mathrm{e}^x = 0 \iff (x-1)^2 = 0(*) \iff x-1=0 \iff x=1.$

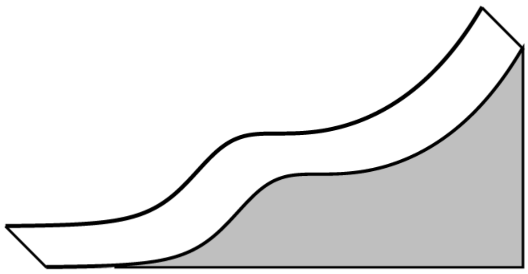
(*) : car $e^x > 0$.

Et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$



Vue de profil du toboggan

a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

Solution : Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

- convexe sur $[-3\,;\,0]$;
- concave sur $[0\,;\,1]$;
- convexe $[1\,;\,4]$.

Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

b. Démontrer que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

Solution : $\forall x \in [-3\,;\,4]$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec :

— $u(x) = (x-1)^2e^x$, donc $u'(x) = 2(x-1)e^x + (x-1)^2e^x = (2+x-1)(x-1)e^x = (x+1)(x-1)e^x$

— $v(x) = (1+x^2)^2$, donc $v'(x) = 2 \times 2x \times (1+x^2) = 4x(1+x^2)$

$$\forall x \in [-3\,;\,4],\ f''(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(x+1)(x-1)e^x \times (1+x^2)^2 - (x-1)^2e^x \times 4x(1+x^2)}{\left(1+x^2\right)^4}$$

$$f''(x) = \frac{[(x+1)(1+x^2) - 4x(x-1)](1+x^2)(x-1)e^x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{[x+x^3+1+x^2-4x^2+4x](x-1)e^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$f''(x) = \frac{[x^3-3x^2+5x+1](x-1)e^x}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{p(x)(x-1)e^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

c. En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Solution : $\forall x \in [-3\ ;\ 4] : f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3\ ;\ 4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $\left(1+x^2\right)^3 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.

Solution : $a_1 = a_0 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 200 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 620$

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.

Solution : Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par $0,85$; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.

Solution :

- $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550$
  $= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$
- $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$.

b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Solution : On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

Solution : Or $u_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

d. Calculer la limite de (a_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution : Comme $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,85)^n = 0$, donc par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} -2800(0,85)^n = 0$, puis, par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} -2800(0,85)^n + 3000 = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 3000$.
Cela signifie que mois après mois, le nombre de collaborateurs en télétravail va se rapprocher de plus en plus de 3000.

4. **a.** Recopier et compléter les 4 dernières lignes de l'algorithme ci-contre afin qu'il détermine le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à p.

Solution :

```
def seuil(p) :
    n = 0
    a = 200
    while a <= p :
        n = n+1
        a = 0.85*a+450
    return n
```

b. Quelle est la valeur retournée par la commande **seuil**(2500) ?

Solution : La valeur retournée par la commande **seuil**(2500) est 11 : à partir de 11 mois le nombre de collaborateur en télétravail aura dépassé strictement 2500.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Solution : f est une fonction rationnelle définie sur $[0\,,\,+\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
$f'(x) = \dfrac{5\times(x+2)-(5x+4)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x+10-5x-4)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$
$f'(x) > 0$ sur $[0\,,\,+\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

Solution : Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

- **Initialisation** : $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5\times u_0+4}{u_0+1} = \dfrac{5\times 1+4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$
  $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** :
  On suppose qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$.
  Montrons alors que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4 &\Longleftrightarrow f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(4)\text{ , car } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^{+*}\\ &\Longleftrightarrow 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4\text{ , car } f(0) = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } f(4) = \frac{24}{6} = 4\\ &\Longrightarrow 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4\text{ , donc } \mathscr{P}(k+1) \text{ est vraie}\end{aligned}$$

- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

Solution :

- Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

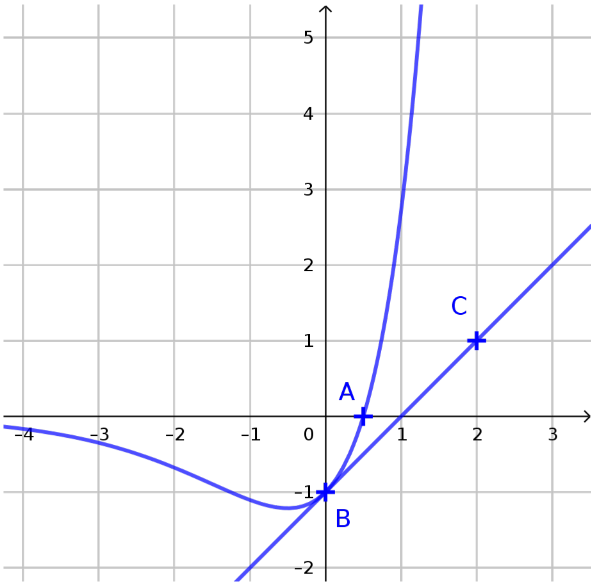
Solution : La suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$; or $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc, par produit, la suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} (4 - u_n) = 0$ et donc par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 4$.

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5 000 que compte l'entreprise.

EXERCICE BONUS **1 point**

Soient a et b deux nombres réels et soit $f : x \to (ax+b)e^x$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



On a :

- $A\,(0,5\ ;\ 0)$
- $B\,(0\ ;\ -1)$
- $C\,(2\ ;\ 1)$
- la tangente à la courbe représentative de la fonction f en 0 passe par les points B et C.

1. A l'aide des informations ci-dessus, déterminer a et b. Détailler le raisonnement.

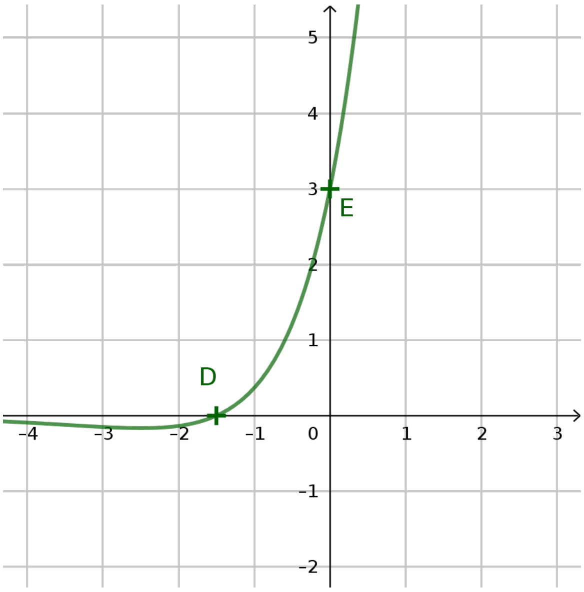
Solution : Comme le point $B\,(0\ ;\ -1)$ appartient à la courbe, cela signifie que $f(0) = -1$.
Or : $f(0) = (a \times 0 + b)e^0 = b$, donc : $b = -1$.

Puis, comme le point $A\,(0,5\ ;\ 0)$ appartient à la courbe, on a : $f(0,5) = 0$.
Or : $f(0,5) = (a \times 0,5 - 1)e^{0,5} = \left(\frac{a}{2} - 1\right)e^{0,5}$. On a donc :

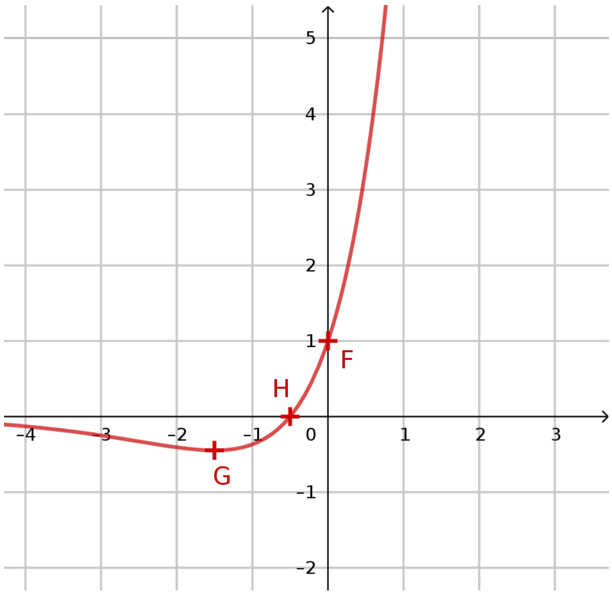
$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{2} - 1\right)e^{0,5} = 0 &\Longleftrightarrow \frac{a}{2} - 1 = 0\text{ , car } e^{0,5} > 0\\ &\Longleftrightarrow \frac{a}{2} = 1\\ &\Longleftrightarrow a = 2\end{aligned}$$

On a donc : $a = 2$, $b = -1$, et $f(x) = (2x-1)e^x$

2. Voici deux courbes représentatives :



On a : $D\,(-1{,}5\,;\,0)$ et $E\,(0\,;\,3)$ appartiennent à la courbe.



On a : $F\,(0\,;\,1)$, $G\,(-1{,}5\,;\,-0{,}45)$ et $H\,(-0{,}5\,;\,0)$ appartiennent à la courbe.

Parmi les deux courbes ci-dessus, laquelle des deux est représentative de la fonction f' ? de la fonction f'' ? Détailler le raisonnement.

Solution : On va dériver la fonction f deux fois pour étudier ses variations et sa convexité :
$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x$ et $f''(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x$.

Étude des variations de f :

$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow (2x+1)e^x \Longleftrightarrow 2x+1 > 0$, car $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 2x > -1 \Longleftrightarrow x > \dfrac{-1}{2}$

Et de même : $f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x < \dfrac{-1}{2}$

Ainsi, la fonction dérivée première de f est positive sur $\left[\dfrac{-1}{2}\,;\,-\infty\right[$ et négative sur $\left]-\infty;\,\dfrac{-1}{2}\right]$: la courbe de droite est celle de f'.

Étude de la convexité de f :

$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow (2x+3)e^x \Longleftrightarrow 2x+3 > 0$, car $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow 2x > -3 \Longleftrightarrow x > \dfrac{-3}{2}$

Et de même : $f''(x) < 0 \Longleftrightarrow x < \dfrac{-3}{2}$

Ainsi, la fonction dérivée seconde de f est positive sur $\left[\dfrac{-3}{2}\,;\,-\infty\right[$ et négative sur $\left]-\infty;\,\dfrac{-3}{2}\right]$: la courbe de gauche est celle de f''.