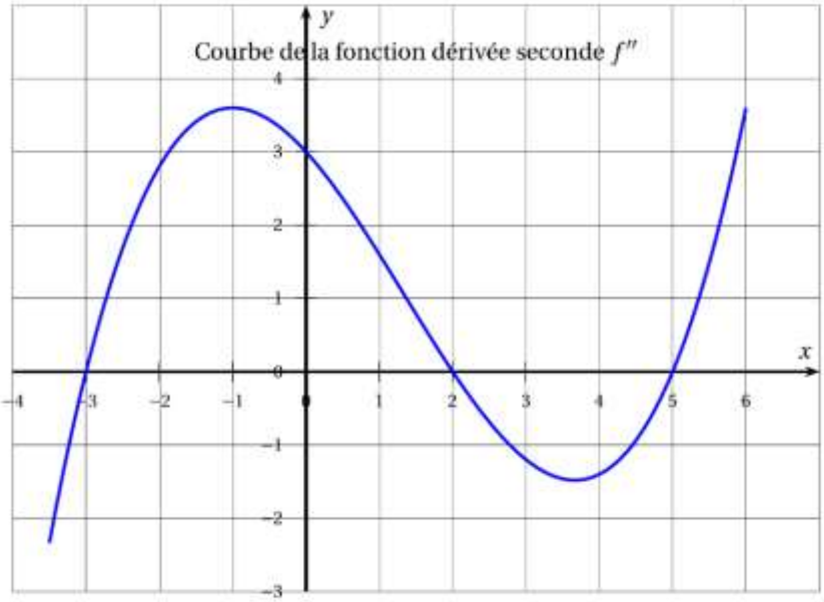
ENTRAªINEMENT DS1 _ MATHS	Term. spé

EXERCICE 1 :

(I) On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3,5\,;\,6]$.



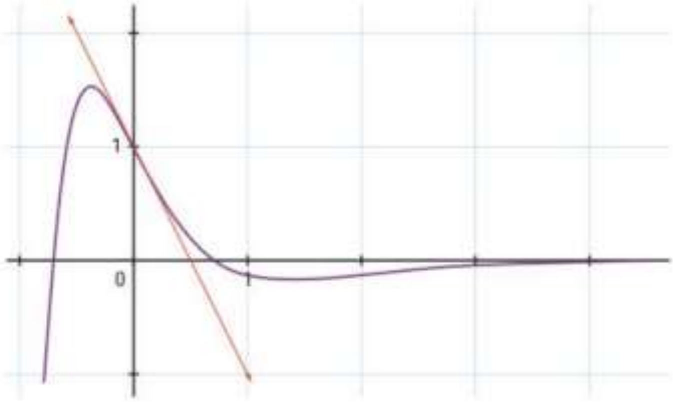
A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$.

B. La fonction f admet trois points d'inflexion.

C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0; 2]$.

(II)

La courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

1. $f'(0) = -1$

2. $f'(1) = 0$

3. $f''(1) < 0$

4. $f'(x) > 0$ sur $[2\,;\,3]$.

5. f est convexe sur $[0\,;\,3]$.

6. Si f est la fonction dérivée d'une fonction g, alors g est croissante sur $[1\,;\,3]$.

7. Si f est la fonction dérivée d'une fonction g, alors g est concave sur $[0\,;\,0{,}5]$.

EXERCICE 2 :

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels **R**, par

$$g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1++e^x)^2}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur **R** et on note g' sa fonction dérivée.

1. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur **R** et que $g'(0) = 0$.
Déterminer le signe de la fonction g' sur **R**.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction g et calculer le minimum de la fonction g sur **R**.

Partie B

Soit f la fonction définie sur **R** par :

$$f(x) = 3 - \frac{2}{1+e^x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, représentée dans la **figure** ci-dessous.

Soit A le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.

1. Démontrer que le point B$(0; 2)$ appartient à $\mathscr{C}_f$.

2. Soit x un réel quelconque.
On note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x; f(x))$.
Démontrer que A$M^2 = g(x)$.

3. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.
Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la distance AM est minimale.

4. On admet que la fonction f est dérivable sur **R** et on note f' sa fonction dérivée.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. Soit T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.
Démontrer que l'équation réduite de T est $y = \frac{x}{2} + 2$.

5. a. Montrer que $f''(x) = \frac{2e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$

b. En déduire la convexité de la fonction f sur R.

c. Que peut-on en déduire sur le point B ?

d. Quelles inégalités peut-on en déduire sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ entre $f(x)$ et $y = \frac{x}{2} + 2$?

<ins>**Question Bonus :**</ins>

Démontrer que la droite T est perpendiculaire à la Droite (AB).