ENTRAªINEMENT DS1 _ MATHS_ ÉLÉMENTS DE CORRECTION	Term. spé

EXERCICE 1 :

(I) On voit sur la figure que $f''(-3) = f''(2) = f''(5) = 0$: la dérivée seconde s'annule trois fois donc la fonction f admet trois points d'inflexion. Réponse B.

(II)

1. $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente en 0. La tangente en 0 passe par les points $(0;1)$ et $(1;-1)$. Son coefficient directeur est donc $\dfrac{-1-1}{1-0} = -2$.

   L'affirmation est donc fausse.

2. La tangente à la courbe en 1 n'est pas horizontale, donc $f'(1) \neq 0$.

   L'affirmation est donc fausse.

3. Au point d'abscisse 1, la fonction est convexe d'où $f''(1) > 0$. L'affirmation est donc fausse.

4. Sur $[2;3]$, f est croissante donc $f'(x) > 0$. L'affirmation est donc vraie.

5. La courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur $[0;3]$.
   L'affirmation est donc vraie.

6. $f = g'$ est négative sur $[1;3]$ donc g est décroissante sur $[1;3]$.

   L'affirmation est donc fausse.

7. Sur $[0;0,5]$, $f = g'$ est décroissante donc g est concave sur $[0;0,5]$.

   L'affirmation est donc vraie.

EXERCICE 2 :

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$, par $g(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{(1++e^x)^2}$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et que $g'(0) = 0$.

- Pour $x < 0$, comme la fonction g' est strictement croissante, on a $g'(x) < g'(0)$; on sait que $g'(0) = 0$ donc, pour tout $x < 0$, on a $g'(x) < 0$.
- Pour $x > 0$, comme la fonction g' est strictement croissante, on a $g'(x) > g'(0)$; on sait que $g'(0) = 0$ donc, pour tout $x > 0$, on a $g'(x) > 0$.

2. La fonction g' s'annule et change de signe pour $x = 0$; elle passe de négative à positive, donc la fonction g admet un minimum en $x = 0$ qui vaut $g(0) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{(1+1)^2} = \dfrac{5}{4}$.

On dresse le tableau des variations de la fonction g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = 3 - \dfrac{2}{1+e^x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, représentée dans la **figure** ci-dessous.

Soit A le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2} ; 3\right)$.

1. $f(0) = 3 - \dfrac{2}{1+e^0} = 3 - \dfrac{2}{2} = 2$ donc le point B(0; 2) appartient à $\mathscr{C}_f$.
2. Soit x un réel quelconque.
   On note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x ; f(x))$.
   $$AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (f(x) - 3)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{2}{1+e^x} - 3\right)^2$$
   $$= x^2 + x + \frac{1}{4} + \left(-\frac{2}{1+e^x}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^x)^2} = g(x)$$
3. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.
   $AM^2 = g(x)$ et $g(x)$ est minimale pour $x = 0$; AM est minimale pour $x = 0$ donc si M a pour abscisse 0, c'est-à-dire est en B.
4. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Pour tout réel x, $f'(x) = 0 - \dfrac{0 - 2e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$
   b. Soit T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.
   L'équation réduite de T est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
   - $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$ donc $f'(0) = \dfrac{2 \times 1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{2}$
   - $f(0) = y_B = 2$

   Donc l'équation réduite de T est $y = \dfrac{x}{2} + 2$.

5. a. $f''(x) = \dfrac{2e^x(1+e^x)^2 - 2e^x \times 2(1+e^x) \times e^x}{(1+e^x)^4} = \dfrac{2e^x(1+e^x)[(1+e^x) - 2e^x]}{(1+e^x)^4} = \dfrac{2e^x(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^3} = \dfrac{2e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$

b. Pour tout $x \in R, 2e^x > 0$ et $(1+e^x)^3 > 0$, donc le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $(1-e^x)$.

Or $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > e^x \Leftrightarrow e^0 > e^x \Leftrightarrow 0 > x$ car la fonction exponentielle est une fonction strictement croissante sur R.

Conclusion : pour tout $x \in]-\infty; 0[; f''(x) > 0$ et la fonction f est convexe sur cet intervalle. Pour tout $x \in]0; +\infty[, f''(x) < 0$ et la fonction f est concave sur cet intervalle.

c. Puisque $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en 0, abscisse du point B, alors B est le point d'inflexion.

d. B est un point d'inflexion, donc T traverse la courbe en B, comme f est convexe sur $]-\infty; 0[$ alors C_f au-dessus de T sur cet intervalle soit pour tout $x \in]-\infty; 0], 3 - \frac{2}{1+e^x} > \frac{x}{2} + 2$. De même sur $\}0; +\infty[, f$ est concave donc C_f est en-dessous de T sur cet intervalle soir pour tout $x \in]0; +\infty[;$ $3 - \frac{2}{1+e^x} < \frac{x}{2} + 2$

question bonus :

La droite T a pour équation $y = \dfrac{x}{2} + 2$ soit $\dfrac{x}{2} - y + 2 = 0$; elle a donc pour vecteur normal $\vec{n}\left(\dfrac{1}{2} ; -1\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(0 - \left(-\dfrac{1}{2}\right) ; 2 - 3\right)$ soit $\left(\dfrac{1}{2} ; -1\right)$; il est donc normal à la droite T.

On en déduit que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB).