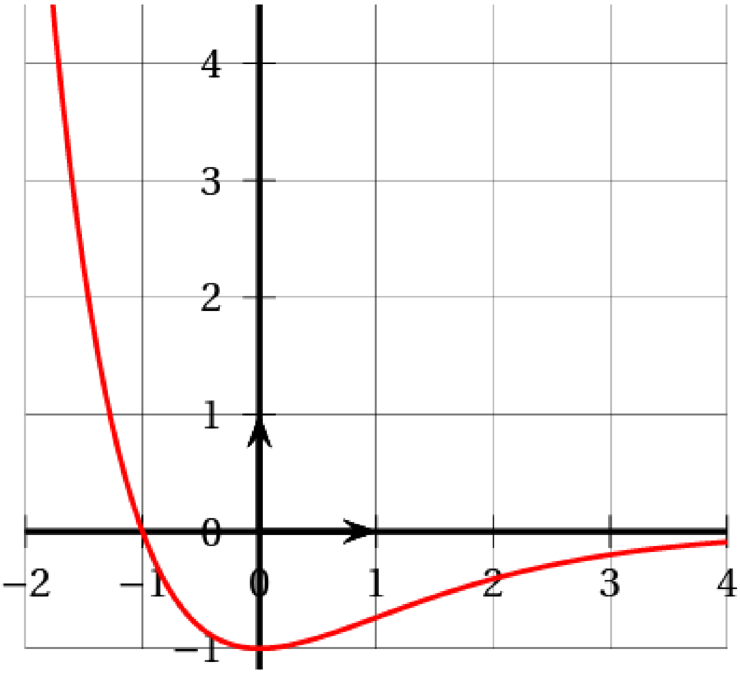
ൾ Devoir surveillé n°1 ൿ

EXERCICE 1 **14 points**

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $[-2 ; 4]$.
2. La convexité de la fonction f sur $[-2 ; 4]$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
   c. Sachant que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2 ; -1]$, déterminer un encadrement à 10^{-1} près de α.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f''(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$
   b. En déduire la convexité de la fonction f.
   c. Déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion de $\mathscr{C}$.
3. **a.** Montrer que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en -2 que l'on note T_{-2} est : $y = e^2x + 2e^2$.
   b. En déduire, en utilisant la convexité de f que pour tout $x \in \mathbb{R}^-$:

$$(x+2)e^{-x} \leqslant e^2x + 2e^2$$

   La question suivante est une question bonus :

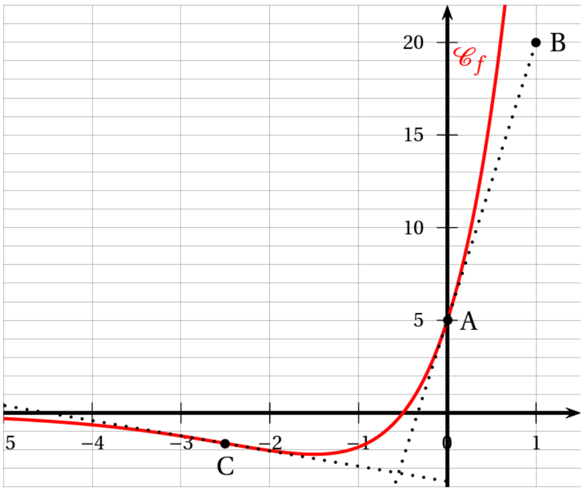
   c. En utilisant une autre méthode, montrer qu'en fait $(x+2)e^{-x} \leqslant e^2x + 2e^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 2 **6 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Le graphique ci-contre donne la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On notera f' la fonction dérivée de f.
On donne les points A de coordonnées $(0\,;\,5)$ et B de coordonnées $(1\,;\,20)$.
Le point C est le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse $-2,5$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

Les trois questions se rapportent à cette même fonction f.



1. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$$

où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5\,;\,0)$.

On peut affirmer que :

a. $a = 10$ et $b = 5$

b. $a = 2,5$ et $b = -0,5$

c. $a = -1,5$ et $b = 5$

d. $a = 0$ et $b = 5$

2. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = (10x+25)\mathrm{e}^x.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$

b. La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$

c. Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$

d. $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

3. On peut affirmer que :

a. $f'(-0,5) = 0$

b. si $x \in]-\infty\,;\,-0,5[$, alors $f'(x) < 0$

c. $f'(0) = 15$

d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.