~ Éléments de correction du DS n°1 ~

EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC - MÉTROPOLE - 8 JUIN 2021 **14 points**

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $[-2\,;\,4]$.

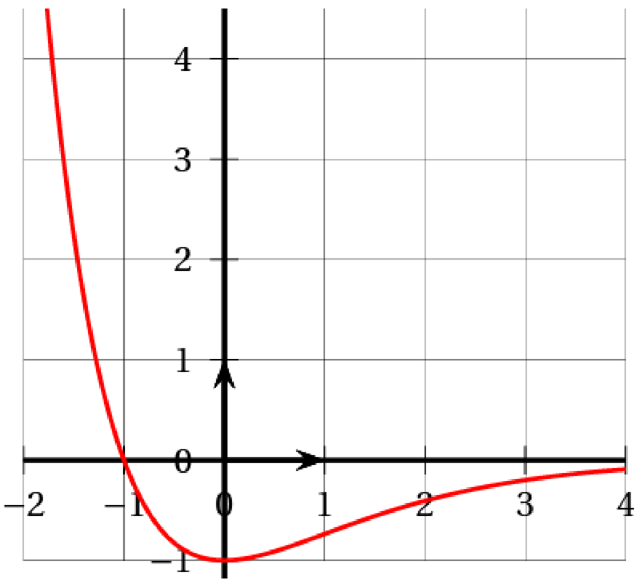
Solution : D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :

- la fonction f' semble positive sur $[-2\,;\,-1[$ donc la fonction f semble croissante sur cet intervalle ;
- la fonction f' semble négative sur $]-1\,;\,4]$ donc la fonction f semble décroissante sur cet intervalle.

2. La convexité de la fonction f sur $[-2\,;\,4]$.

Solution : D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :

- la fonction f' semble décroissante sur $[-2\,;\,0[$ donc la fonction f semble concave sur cet intervalle ;
- la fonction f' semble croissante sur $]0\,;\,4]$ donc la fonction f semble convexe sur cet intervalle.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x-2)\,\mathrm{e}^{-x} = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$ sur $\mathbb{R}$; donc $f'(x)$ s'annule et change de signe en $x = -1$.
De plus : $f(-1) = (-1+2)\,\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$; on établit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗	e	↘	

c. Sachant que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$, déterminer un encadrement à 10^{-1} près de α.

Solution : Grâce au mode tableur sur la calculatrice, entre -2 et -1 avec un pas de 0,1, on obtient :

Fonctions | Graphique | Tableau

Régler l'intervalle

x	f(x)
-2	0
-1.9	0.6685894
-1.8	1.209929
-1.7	1.642184
-1.6	1.981213
-1.5	2.240845
-1.4	2.43312

On conclut donc que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$.

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f''(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) = (-1) \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (-1+x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x}$

b. En déduire la convexité de la fonction f.

Solution : $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f''(x)$ est du signe de x sur $\mathbb{R}$.

- Sur $]-\infty\,;\,0[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
- Sur $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.
- En $x = 0$, $f''(x) = 0$.

c. Déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion de $\mathscr{C}$.

Solution : D'après la question précédente, en $x = 0$ f'' s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de $\mathscr{C}$ est le seul point d'inflexion de $\mathscr{C}$.
Or : $f(0) = (0+2)e^0 = 2$. Le point d'inflexion a donc pour coordonnées : $(0\,;\,2)$.

3. a. Montrer que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en -2 que l'on note T_{-2} est : $y = e^2x + 2e^2$.

Solution : L'équation de la tangente T_{-2} est : $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ soit $y = e^2 \times (x+2) + 0$.
Donc T_{-2} a pour équation $y = e^2x + 2e^2$.

b. En déduire, en utilisant la convexité de f que pour tout $x \in \mathbb{R}^-$:

$$(x+2)e^{-x} \leqslant e^2x + 2e^2$$

Solution : La fonction f est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ d'après la question **2.b.**, donc la courbe est en-dessous de ses tangentes sur cet intervalle, notamment en dessous de T_{-2} puisque $-2 \in]-\infty\,;\,0]$ d'où :
$\forall x \in]-\infty\,;\,0]$, $f(x) \leqslant e^2x + 2e^2$ c'est-à-dire $\forall x \in]-\infty\,;\,0]$, $(x+2)e^{-x} \leqslant e^2x + 2e^2$.

La question suivante est une question bonus :

c. En utilisant une autre méthode, montrer qu'en fait $(x+2)e^{-x} \leqslant e^2x + 2e^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution : Pour répondre à cette question, nous allons résoudre sur $\mathbb{R}^+$ l'inéquation suivante :

$$(x+2)e^{-x} \leqslant e^2x + 2e^2$$

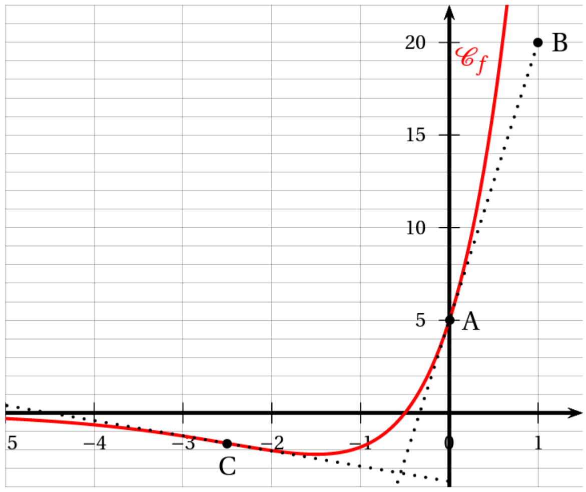
En effet, dans la question précédente, on a montré que l'inégalité était vraie sur $\mathbb{R}^-$, donc si on veut répondre à la question, il suffit de montrer qu'elle est également vraie sur $\mathbb{R}^+$.
$\forall x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}(x+2)e^{-x} \leqslant e^2x + 2e^2 &\Longleftrightarrow (x+2)e^{-x} \leqslant (x+2)e^2\\ &\Longleftrightarrow e^{-x} \leqslant e^2 \text{ car } x+2>0\\ &\Longleftrightarrow e^{x} \geqslant e^{-2} \text{ car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $e^x \geqslant e^{-2}$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $(x+2)e^{-x} \leqslant e^2x + 2e^2$ est vraie sur $\mathbb{R}^+$, et donc sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente.

Le graphique ci-contre donne la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On notera f' la fonction dérivée de f.
On donne les points A de coordonnées $(0; 5)$ et B de coordonnées $(1; 20)$.
Le point C est le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse $-2,5$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

Les trois questions se rapportent à cette même fonction f.



1. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x$$

où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5\,;\,0)$.
On peut affirmer que :

- **a.** $a = 10$ et $b = 5$
- **b.** $a = 2,5$ et $b = -0,5$
- **c.** $a = -1,5$ et $b = 5$
- **d.** $a = 0$ et $b = 5$

Solution : Réponse a : lorsque $x = 0$, on lit graphiquement que $\mathscr{C}_f$ passe par le point A de coordonnées $(0;5)$, ce qui signifie que $f(0) = 5$. Or, $f(0) = (a \times 0 + b)\,\mathrm{e}^0 = b$. Donc $b = 5$.

Puis, on dérive la fonction f : $f'(x) = a \times \mathrm{e}^x + (ax+5)\,\mathrm{e}^x = (ax + a + 5)\,\mathrm{e}^x$.
Graphiquement, on lit que la pente de la droite (AB) est 15, ce qui signifie que $f'(0) = 15$. Or, $f'(0) = (a \times 0 + a + 5)\,\mathrm{e}^0 = a + 5$. On a donc : $a + 5 = 15 \Longleftrightarrow a = 10$

2. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = (10x + 25)\mathrm{e}^x.$$

On peut affirmer que :

- **a.** La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$
- **b.** La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$
- **c.** Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$
- **d.** $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

Solution : Réponse c : comme $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $f''(x)$ est du signe de $10x + 25$.
$10x + 25 \geqslant 0 \Longleftrightarrow 10x \geqslant -25 \Longleftrightarrow x \geqslant -2,5$; et de même : $10x + 25 \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant -2,5$.
Ainsi, la fonction f est concave sur $]-\infty; -2,5]$, convexe sur $[-2,5; +\infty[$ et son seul point d'inflexion est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $-2,5$ puisque f'' s'annule en changeant de signe en $x = -2,5$ (c'est-à-dire le point C).

3. On peut affirmer que :

a. $f'(-0,5) = 0$

b. si $x \in]-\infty\,;\,-0,5[$, alors $f'(x) < 0$

c. $f'(0) = 15$

d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

Solution : Réponse c :

a. $f'(-0,5) = 0$

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $-0,5$ est manifestement positif Faux

b. si $x \in]-\infty\,;\,-0,5[$, alors $f'(x) < 0$

Le nombre dérivé s'annule en à peu près en $x = -1,5$ Faux

c. $f'(0) = 15$

Graphiquement $f'(0) = \dfrac{20-5}{1-0} = 15$ Vrai

d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$

f' est négative sur $]-\infty\,;\,-1,5[$ et positive sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ Faux